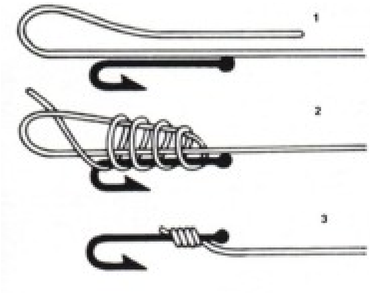
Stipsicz András: Csomók és invariánsaik

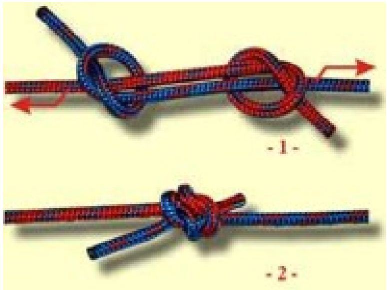
című, 2006. jan.24-ei előadása alapján írta
Kisfaludy Sándor, Szilágyi Dániel és Hraskó András.
Az ábrák és elektronikus változatok létrehozásában
Beck Zoltán közreműködött.

1. Bevezetés: ismerkedés a csomókkal



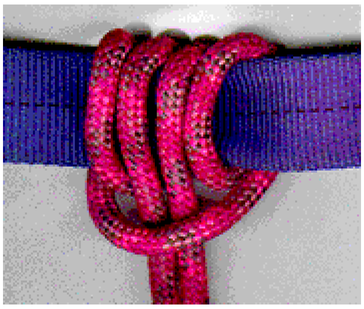
Horogkötés a Baranyai Horgász Magazin Horgásziskolájából

1. ábra



Matrózkötés a Vízvonal Kft honlapjáról

2. ábra

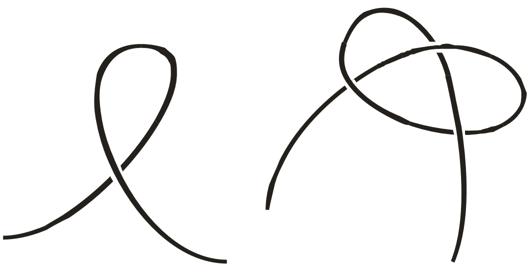


A pruszikcsomót a hegymászók és alpinisták az ereszkedésnél biztosításnak használják

3. ábra

Csomókkal a mindennapjaink során többször találkozunk. Például amikor megkötünk egy cipőfűzőt, vagy paradicsomot kötözünk a kertben. Régen a tengerészek számára is fontos volt, hogy a különböző köteleket úgy kössék, hogy a keletkező csomók erősek, teherbíróak, tartósak, nehezen kioldhatók legyenek. Ezek a tulajdonságok azonban nagymértékben függenek a kötél anyagától, hosszától, vastagságától. A matematikai vizsgálat során ezektől eltekintünk, és csak un. topologikus tulajdonságokkal foglalkozunk.

Ajánló
Alan L. Folsom, Jr.: Az ötven legalapvetőbb csomó cserkészeknek, http://www.folsoms.net/knots/
U.N.E. hegymászóklub: hegymászócsomó animációk, http://www.une.edu.au/unemc/climbing/knots/
Halászcsomók: http://www.killroys.com/knots/knots.htm
Horgászkötések, horgászcsomók a Baranyai Horgász Magazin Horgásziskolájában:
http://www.bhm.hu/Horg%E1sziskola/kotesek.php
Hajózáshoz alkalmazott csomók a Vízvonal Kft honlapján: http://www.vizvonal.hu/csomok.php
A nyakkendő csomózási technikái: http://www.scoutdb.org/h2tat/
A Blue Ridge Mountain mentőcsapat (BRMRG) ajánlata: http://brmrg.med.virginia.edu/knots/knots.html
Peter Suber linkgyűjteménye csomókról: http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm
Ropers Knot Page: http://www.realknots.com/



4. ábra

Vegyünk most egy spárgát és csináljunk rá egy egyszerű hurkot! A hurkon vezessük át az egyik véget. (4. ábra) Így kaptunk egy csomót, amit könnyen kibogozhatunk, csak az elvégzett lépéseket kell visszafelé végrehajtani, azaz először kivesszük az áthúzott véget, majd megszüntetjük a hurkot. Vegyük észre, hogy egy spárgát bárhogy bogozhatunk, a lépések visszafelé elvégzésével mindig ki tudjuk azt bogozni. A csomóelmélet ezért olyan csomókkal foglalkozik, amelynek végeit a bogozás után összeragasztottuk.

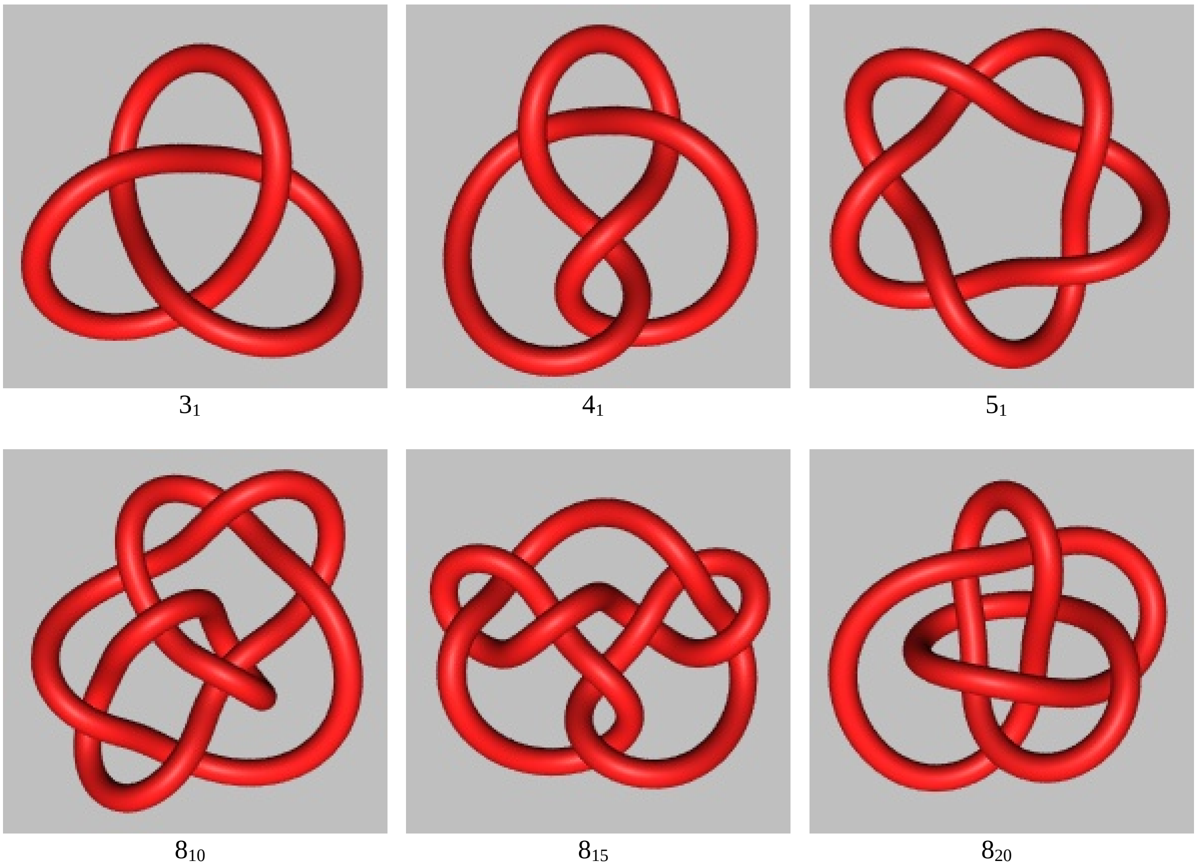
Matematikai, azaz topológiai értelemben a csomó tulajdonképpen egy síkbeli kör (jelben S^1, mint „sphere in dimension 1”) 3 dimenziós térben (jelben Â^3, mint valós=real, reel, 3 dim. tér) való elhelyezése. A csomót tehát úgy képzelhetjük el, mint egy nagyon hosszú és nagyon vékony, nyúlékony spárgából készült térbeli objektumot.

A csomó definíciója:

Csomónak nevezzük azt az *S '* alakzatot, amely az S^1 kör önátmetszés nélküli képe az Â^3 térben.

Megjegyzés
Az ennél még precízebb definíció a folytonosság fogalmán alapszik. A folytonosság fogalmának tárgyalása azonban meghaladja e cikk kereteit. Amikor csomóról beszélünk, akkor egy folytonos függvény van a háttérben, amely az S^1 körön van értelmezve, a térbe képez és az S^1 körön injektív, azaz a kör különböző pontjait különböző térbeli pontokba képezi, nem „ragaszt” össze pontokat. A csomó a kör egy ilyen folytonos függvénynél származó képe.

Néhány matematikai csomó a „Csomó szerver”-ről (http://www.colab.sfu.ca/KnotPlot/KnotServer/):



5. ábra

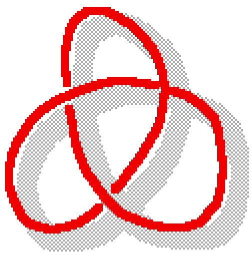
Most már megadhatjuk a csomók azonosságának feltételét.

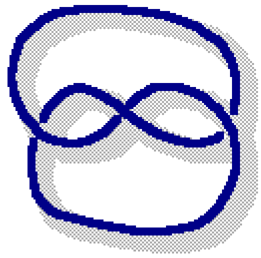
Csomók azonossága
Két csomó akkor nevezzük azonosnak, ha egyik a másikba átalakítható vágás és ragasztás nélkül.

Megjegyzés
Az olyan csomókat, amelyek egymásba mozgathatók, folytonosan egymásba deformálhatók tehát nem különböztetjük meg egymástól.

Annak eldöntése, hogy két adott csomó egymásba alakítható-e, tehát azonosak-e, általában nagyon nehéz. Próbálkozzunk meg ezzel egy viszonylag egyszerű esetben!

1. feladat: Mutassuk meg, hogy a 6.a., 6.b. ábrán látható csomók azonosak.





Háromlevelű csomó — Háromlevelű csomó?

3-trefoil link

6.a. ábra — 6.b. ábra

Az 1. feladat megoldása: „Tie me up, tie me down”, http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/trefoil.html

Az alábbi bal oldali képen (7.a. ábra) látható csomót triviális csomónak is nevezik. Természetesen triviális csomó minden olyan csomó is, amely a triviális csomóval azonos. Az alábbi jobb oldali képen (7.b. ábra) látható csomó is triviális. Ez gondolom az olvasó számára messzemenően nem triviális.

triviális csomó — triviális csomó?

trivial knot

7.a. ábra — 7.b. ábra

A http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/knot-theory/knot-theory.html oldalon található mpeg animáción nyomon követhető a „kicsomózás” folyamata. A közvetlen link az mpeg filera:

http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/knot-theory/monster-movie.mpg

2. feladat: Mutassuk meg, hogy a 8. ábrán látható csomó triviális.

Ajánló

Robert Glenn Scharein:

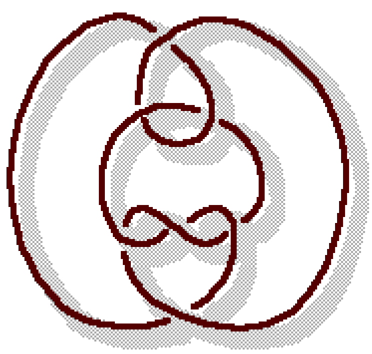
http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/se/movie.html

Thomas K.K. Au: „Tie me up, tie me down (the legend of knots)” című előadása a Honkongi Kínai Egyetem matematika tanszékének honlapján:

http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/unknot.html

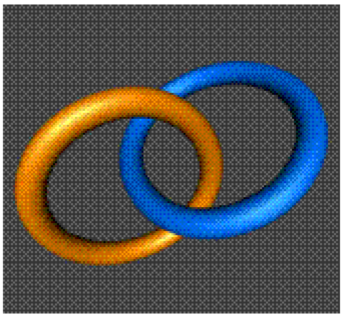
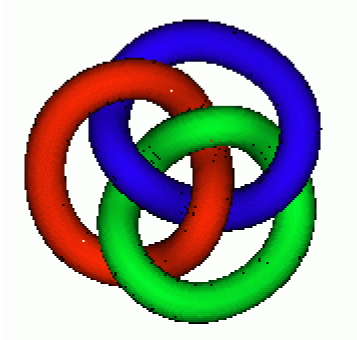
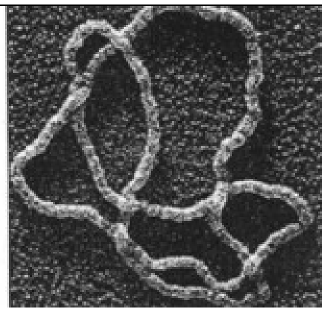
Simon Willerton: A topological tie-in, Nature 368 103-104, 10 March 1994,

http://www.sheffield.ac.uk/simonwillerton/nature/nat.html



forrás: Tie me up, tie me down

8. ábra

		
2.2.1. lánc 9. ábra	http://seemanlab4.chem.nyu.edu/borro.html 10. ábra	DNS szál 11. ábra

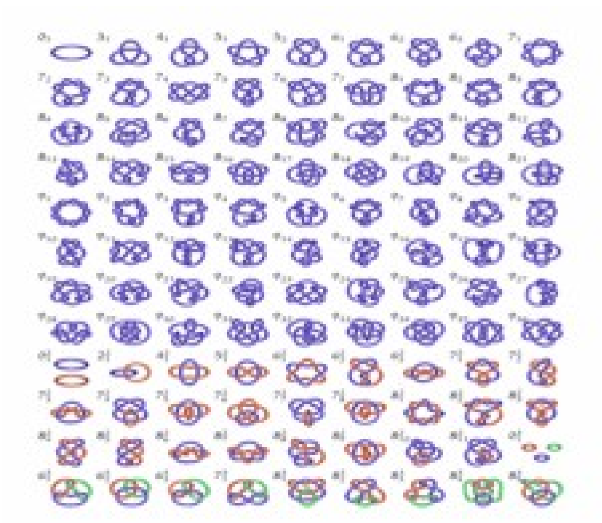
Több csomó egymásba tételével láncokat kaphatunk, ezekre láthatunk példát a 9. és 10. ábrán. A 10. ábra a Borromean-láncot ábrázolja, aminek az a különleges tulajdonsága, hogy bármely csomóját elvágva szétszedhető.

Borromean rings homepage: http://www.liv.ac.uk/~spmr02/rings/
A Minneapolisi Geometria Centrum „Knot not” című animációs filmjének képei, melyből a Borromean gyűrűk komplementerének világába, egy érdekes háromdimenziós sokaságba is bepillanthatunk, amely a kockából a lapok pontjainak furfangos összeragasztásával is megkapható: :
http://www.geom.uiuc.edu/graphics/pix/Video_Productions/Not_Knot/

Nézzünk néhány példát a csomóelmélet alkalmazására!

Biológia:
A DNS láncok elrendeződésénél a kutatók többször találkoznak csomóelméleti problémákkal, bár itt a fizikai tulajdonságok általában fontosabb szerepet játszanak, mint például a gének sorrendje, vagy a DNS lánc hossza.

DeWitt Sumners: Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes (Notices of the AMS, May 1995, volume 42, number 5., 528-537) http://www.math.uic.edu/~kauffman/sumners.pdf
vagy http://www.ams.org/notices/199505/sumners.pdf
A DNA topológiájával foglalkozó kutatási és ismeretterjesztő cikkek jegyzéke Srebrenka Robic gyűjtésében:
http://www.beloit.edu/~biology/Srebrenka/Knots.html



Periódusos rendszer csomókkal, Tait szerint
12. ábra

Fizika:
A fizika nem csak alkalmazási terület, hanem a csomóelmélet tulajdonképpen a fizikából indult ki. A XIX. Században Lord Kelvin atommodellje arra épült, hogy a világegyetemet az éter, egy különleges anyag tölti ki, amelynek csomózódásai az atomok. Tait 1867 körül foglalkozott elsőként ennek kapcsán behatóan a csomókkal, megpróbálta felsorolni őket, ezért őt tekintjük az első „csomóelmélész”-nek. Végül az atommodell csak 20 évig tartotta magát, mert Bohr elmélete megalapozottabbnak bizonyult.

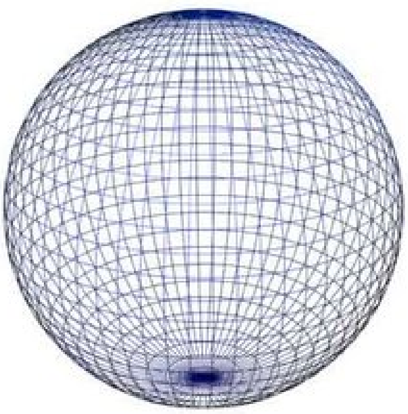
Matematika:
A 4 dimenziós felületek leírásánál alkalmazhatunk csomókat.

Eric Weissstein lexikona Lord Kelvinről: a http://scienceworld.wolfram.com/biography/Kelvin.html

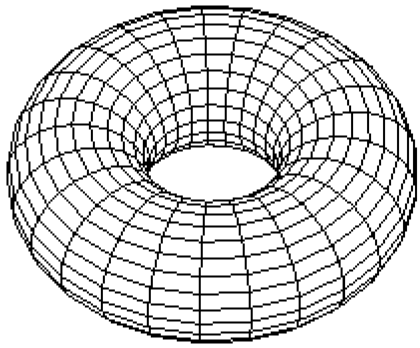
Louis H. Kauffman: Csomó és fizika könyve http://www.worldscibooks.com/mathematics/4256.html
Samuel J. Lomonaco, Jr. „Csomók és a klasszikus elektrodinamika” előadásának kivetített képei, http://www.cs.umbc.edu/~lomonaco/thomson/Slides.html
Vaughan F. R. Jones: Knot Theory and Statistical Mechanics (Scientific American, November, 1990)
Gáspár Merse Előd „Csomók matematikus és fizikus szemmel” című előadásának PowerPoint prezentációja: http://takacs.web.elte.hu/merse_csomoelmelet.ppt

Most pedig lássuk egy példán, mit is értünk topologikus tulajdonság alatt! Ehhez egy kis kitérőt teszünk, elkalandozunk a felületek világába.

2. Felületek és topologikus tulajdonságaik



13.a. ábra



13.b. ábra

A fenti két képen egy gömbfelület (13.a. ábra) és egy tóruszfelület (donut) (13.b. ábra) látható. Szemléletesen is világos, hogy ez a két felület topológiailag különböző, a gömbbe „szakítás” nélkül, azaz folytonos átalakítással nem tudunk lyukat fúrni. Alább egy másik módszert mutatunk, amely megkülönbözteti a két felületet.

3. feladat

Képzeljük el, hogy Földünk teljes felületét, vagy egy tetszőleges golyóbis teljes felületét felosztjuk országok között. Jelölje az országok számát *l*.

Az országokat határvonalak választják el egymástól, a határvonalakon előfordulnak olyan pontok, ahol több ország találkozik, itt több vonal is összefut. Jelölje az ilyen csomópontok számát *v*.

Végül a határvonal-darabok számát jelölje *e*. Egy határvonal-darab a határ két csomópont közötti része.

Bizonyítsuk be, hogy a gömbfelületet bármiképp is osztottuk fel országokra, az *l*, *v*, *e* számokra mindig teljesül az alábbi összefüggés:

$$l - e + v = 2.$$

Megjegyzések

1. Ha pl. a gömböt, mintegy narancsot felszeleteljük *l* szeletre, akkor *l* „ország” (ennyi darab narancshéj) keletkezik, de mindössze csak *v*=2 csomópont jön létre, közöttük pedig *l* határvonal fut. Ebben a példában tehát

$$l - e + v = l - l + 2 = 2.$$

2. A valóságban az országokban lehetnek lyukak. Olaszország pld lyukas, körbeveszi a Vatikánt, amely egy másik ország. Ebben a feladatban nem engedünk meg lyukas országokat.
3. A valóságban az is lehetséges, hogy egy ország több különálló részből áll. Oroszország Kalinyingrádi területe pl. nincs összeköttetésben az anyaországgal, más országok választják el tőle. Itt ezt sem engedjük meg, a feladatban hallgatólagosan feltesszük, hogy minden ország összefüggő.

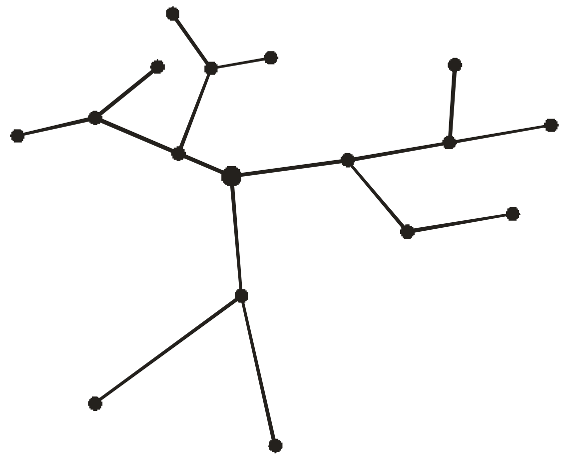
4. Földünkön vannak olyan területek, amelyek egy országhoz sem tartoznak. A matematikai problémában a golyóbis minden pontja ki van osztva az országok között, csak a határvonalak státusa vitatható.
5. Ha egy konvex poliédert egy belső pontjából kivetítünk egy – a vetítési pont köré írt – gömbre, akkor a gömbön természetes módon adódik a feladatnak megfelelő felosztás: a poliéder lapjaiból lesznek az országok, a csúcsokból a csomópontok, az élekből a határvonal-darabok. Így a feladat állítása azt is jelenti, hogy bármely konvex poliéderben a lapok (l), az élek (e) és a csúcsok (v) száma között fennáll az $l - e + v = 2$ összefüggés (Euler tétele). Pl. a kockának 6 lapja, 12 éle és 8 csúcsa van, melyekre $6 - 12 + 8 = 2$.

Bizonyítás: (csak vázlatosan!)[1]

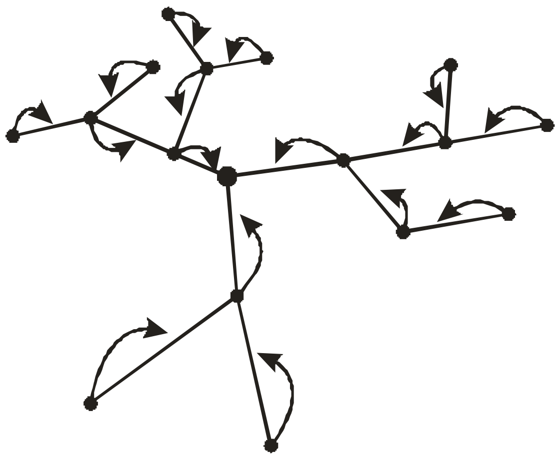
Képzeljük el, hogy a golyóbis teljes felületén víz van, amely azonban nem összefüggő, a határok helyén gát van. Az országok tehát különálló tavak. Építsünk a csomópontokba őrtornyokat! Tehát v az őrtornyok, e az őrtornyok közti gátszakaszok, l a tavak száma! Minden őrtoronyba ültessünk egy-egy gátőrt!

Most vegyük sorra a gátakat, és ha olyan gáttal találkozunk, ami két még nem egybefüggő tavat választ el egymástól, akkor azt felrobbantjuk. Így a gátszakaszok száma és a tavak száma is eggyel csökken, azaz a fenti összegben l-e nem változik. Az eljárásunk végén egy olyan gömböt kapunk, amelyen van egy nagy tó, ami mindent beborít, és néhány gát.

Ezek után a gátőrök közül kijelölünk egy főgátőrt. A főgátőr füttyszavára az összes többi elindul felé (6.ábra), és amint az első gát feléhez ér, felrobbantja magát. A robbanás akkora, hogy az a gát, amin áll, megszűnik. Így a gátőrök számának és a gátak számának különbsége, azaz v-e nem változik. Így végül megmarad a fő gátőr, és a hatalmas, mindent beborító óceán, azaz v=1, l=1 és most már e=0, azaz v-e+l=2 teljesül. Az eljárás során nem változott a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán található kifejezés értéke, tehát az egyenlőség eredetileg is igaz volt.



14.a. ábra



14.b. ábra

4. (Házi) feladat: A bizonyításban felhasználtuk az alábbiakat:

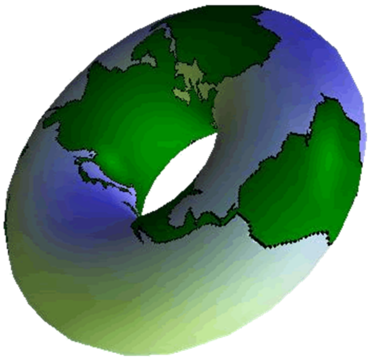
a) minden őr el tud indulni a főgátőr felé, és útvonal egyértelmű;

b) a főgátőr füttyszavát követően minden gátra egy és csakis egy gátőr kerül.

Miért teljesül ez a két feltétel?

5. (Házi) feladat: Rajzoljuk most térképünket egy gumibelsőre (tóruszra)! Mutassuk meg, hogy ebben az esetben $l - e + v = 0$!

[1] Részletesebben lásd pl. Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, Budapest) 26.2 Tétel.



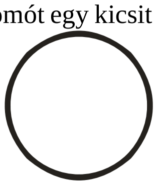
forrás: http://www.erights.org/smart-contracts/donut-lab/
15. ábra

Ajánló
Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok (Euler tételének fejlődéstörténete párbeszédekben)
http://www.typotex.hu/book/m_0010.htm
David Eppstein: 19 bizonyítás Euler tételére, The Geometry Junkyard,
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/
Euler karakterisztika a Mathworld enciklopédiában: http://mathworld.wolfram.com/EulerCharacteristic.html
Euler tételének geometriai bizonyítása, Mathematics Theacher folyóirat,
http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/euler/euler2m.html
Surányi László: Válogatás a Fazekas táborok feladataiból (1987-2003), 2.feladat
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Haziversenyek/Faztabor/altalanos/valogatas_suranyi_2000.html#val2000sur02fel
A Surányi féle feladathoz és ehhez a cikkhez is kötődik Louis H. Kauffman jegyzete:
http://www.math.uic.edu/~kauffman/SevenColors.pdf

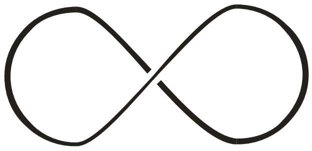
3. A csomók vizsgálatának eszközei

A csomókat a térben kezelni nagyon bonyolult lenne, ezért inkább a csomók síkbeli vetületeit fogjuk vizsgálni. Ehhez úgy vetítjük a csomót, hogy az eredeti alakzatnak legfeljebb két pontja kerüljön a vetületen ugyanabba a pontba. (Azaz ne legyen olyan, hogy a vetületen 3 madzagdarab megy át egy ponton.)

A vetületekkel azonban felvetünk egy másik problémát: egy csomónak nagyon sokféle vetülete lehet. Például a triviális csomót egy kicsit megcsavarva és a megfelelő szögből vetítve a 7. ábrán látható vetületet kapjuk.



16.a.



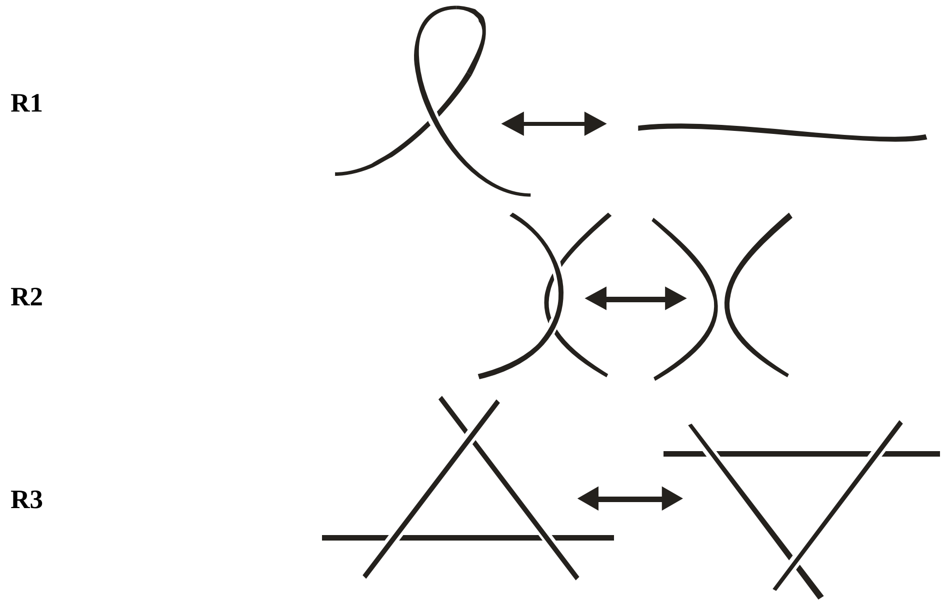
16.b

Ebből adódik a csomóelmélet egyik alapproblémája:

1. kérdés: ha adott kér csomó vetülete, hogyan dönthető el, hogy a két csomó azonos-e?

Erre vonatkozik az alábbi alapvető tétel:

Reidemeister tétele (1927): Két csomó akkor és csakis akkor azonos, ha vetületeik a 17. ábrán látható R1, R2, R3 átalakításokkal egymásba vihetők.



17. ábra

Az R3 lépésnél a bal oldali csomóban az alsó vízszintes részt egyszerűen kissé feljebb toltuk.

Ajánló:

A skóciai St. Andrews egyetem matematikai enciklopédiája Kurt Werner Friedrich Reidemeisterről: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Reidemeister.html

A Freelearning.com csomóelméleti oktatási anyagai: http://www.freelearning.com/knots/intro.htm

Reidemeister tétele azonban nem ad algoritmust annak eldöntésére, hogy két vetület egyazon csomóhoz tartozik-e vagy nem. Előfordul pl., hogy két vetület azonos csomóhoz tartozik, de ennek igazolásához először mindkettőben fel kell növelni a csomópontok számát az R1, R2 lépések balról jobbra való alkalmazásával és csak azután adódik az azonosság.

Fogalmazzuk meg a csomóelmélet két fő célját!

1. cél: Találjunk olyan számot, esetleg polinomot, amely a csomó vetületéből könnyen meghatározható és valójában a csomóhoz tartozik, nem valamely konkrét vetületéhez, tehát a csomó minden vetületére azonos értéket (polinomot) ad. Az ilyen mennyiség, csomó-invariáns, akkor hasznos, ha róla a csomó számos tulajdonsága is leolvasható.

A csomó-vetületekhez rendelt mennyiséget, polinomot, tulajdonságot **csomó-invariáns**nak nevezzük, ha valamely csomó minden egyes vetületére ugyanazt a mennyiséget, polinomot vagy tulajdonságot adja.

Ha igazolni akarjuk, hogy a csomóvetületekhez rendelt mennyiség csomó-invariáns-e, akkor elegendő igazolnunk, hogy értéke az R1, R2, R3 átalakításoknál nem változik (invariáns).

2. cél: Soroljuk fel az összes csomót, pl. készítsünk táblázatot, amelyben minden csomó pontosan egyszer szerepel!

Az is megfelelő lenne, ha találnánk egy vagy néhány olyan csomó-invariánst, amely, illetve amelyek együtt megkülönböztetnék a csomókat. Tehát szerencsés lenne, ha a csomókhoz hozzárendelhető lenne csomó-invariánsok egy halmaza úgy, hogy két csomó pontosan akkor azonos, ha invariáns-halmazuk azonos.

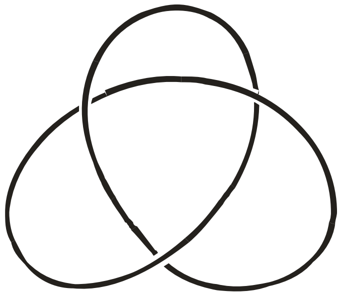
A továbbiakban inkább az 1. céllal foglalkozunk.
Legyen *K* egy csomó! (A *K* betűt az angol csomó szó, a ’knot’ kezdőbetűje miatt használjuk.)

A *K* csomó **kereszteződési szám**a (crossing number) legyen a *K* vetületeiben előforduló kereszteződések számának minimuma! Jelöljük ezt a mennyiséget $c(K)$-val!

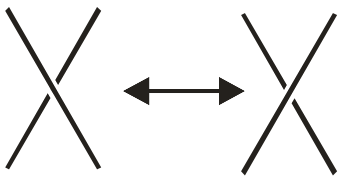
Például a 18. ábrán jelöltük a háromlevelű csomó egy vetületén a kereszteződéseket, ezen a vetületen 3 kereszteződés volt. Az összes vetületet megvizsgálva a legkisebb szám megadja a háromlevelű csomó kereszteződési számát.

Hasonlóan számot rendelhetünk a csomóhoz, ha kiszámoljuk a kicsomózási számát.

Itt a 19. ábrán látható cserék számának minimumát keressük. A 19-es csere során egy kereszteződésnél kicseréljük az alsó és a felső fonalat, úgy, hogy a felsőt elvágjuk, és a másik alatt ragasztjuk össze. Ezt addig ismételjük, amíg a triviális csomóhoz jutunk.



A háromlevelű csomó
18. ábra

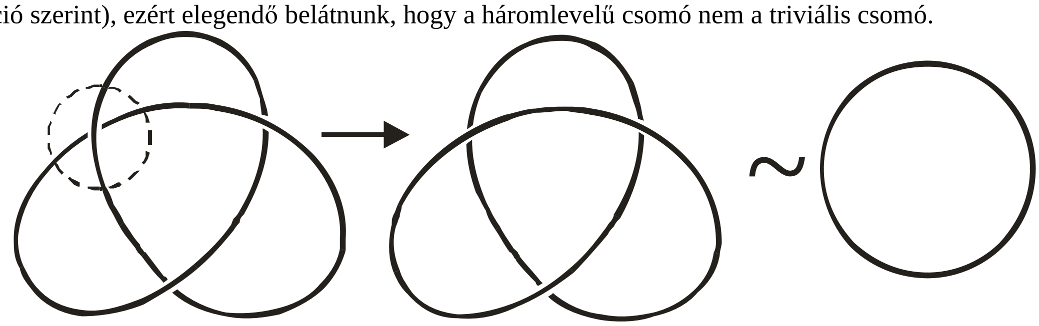


19. ábra

A *K* csomó **kicsomózási szám**a (Unknotting number) a csomó vetületeiben előforduló legkisebb 19-es cserék száma, ami a triviális csomóhoz vezet. Jelöljük ezt a mennyiséget $u(K)$-val!

Ezekkel a mennyiségekkel az a baj, hogy nem könnyű kiszámolni őket, gyakran csak becslésekig jutunk.

Például a háromlevelű csomó egyik kereszteződésén elvégezve a 19-es cserét rögtön a triviális csomóhoz jutunk, ahogy az a 20. ábrán látható. A háromlevelű csomó kicsomózási száma tehát legfeljebb 1. Ahhoz, hogy megmutassuk, ez a kicsomózási szám éppen 1, még be kell látnunk, hogy nem 0. Mivel tudjuk, hogy pontosan egy triviális csomó létezik, és azt is tudjuk, hogy ha egy csomó kicsomózási száma 0, akkor az a triviális csomó (definíció szerint), ezért elegendő belátnunk, hogy a háromlevelű csomó nem a triviális csomó.



20. ábra

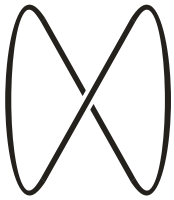
Hasonlóan nem lehet csupán számolással meghatározni a háromlevelű csomó kereszteződési számát. Először bizonyítani kell egy-két dolgot.

6. feladat: Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan csomó, amelynek kicsomózási száma 1!

Bizonyítás:
Nézzük meg, hogy a kereszteződésnél lévő végeket hogyan lehet összekötni, azaz hogy milyen alakokat ölthet az adott csomó minimális számú kereszteződéssel rendelkező vetülete! Nézzük, hogy a jobb felső szárat mivel köthetjük össze! A 21.a. ábrán a bal alsó szárral kötöttük össze, ekkor a másik két szárat összekötve biztosan kapunk még egy kereszteződést, tehát $c(K)$ itt legalább kettő lesz. Ha a bal felső szárral kötjük össze (21.b. ábra), akkor a másik két szabad szárat összekötve a triviális csomót kapjuk, és szintén a triviális csomót kapjuk, ha a jobb alsó szárral kötjük össze (21.c. ábra). Ezzel az állítást beláttuk, hiszen a triviális csomó kereszteződési száma 0.

21.a. ábra

21.b. ábra



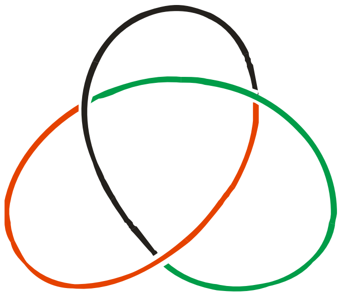
21.c. ábra

7. (Házi) feladat

Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan csomó, amelynek kicsomózási száma 2!

Most definiálunk egy tulajdonságot, aminek segítségével belátjuk, hogy a 3-levelű csomó nem a triviális csomó.

Egy *K* csomó **3-színezhető**, ha *D* a *K* vetülete, és *D* ívei megszínezhetők 3 színnel úgy, hogy az alábbi két tulajdonság teljesül:
1. *D* nem egyszínű;
2. Minden kereszteződésnél pontosan 1 vagy pontosan 3 szín szerepel



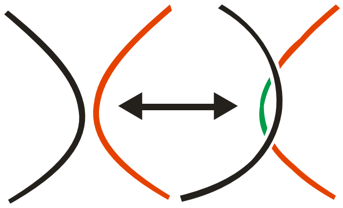
22. ábra

A háromlevelű csomó egyik vetülete 3-színezhető, amint ez a 22. ábrán látható. A definícióval az a baj, hogy a *K* csomó egyik vetületével kapcsolatban mond tulajdonságot, nem *K*-val, tehát egyelőre úgy tűnik, hogy a 3-színezhetőség a *D* vetület tulajdonsága, nem a *K* csomóé. Ezt a problémát oldja fel az alábbi tétel.

Tétel: Ha valamely csomó egyik vetülete 3-színezhető, akkor az összes vetülete 3-színezhető.

A tétel igazolása után joggal mondhatjuk, hogy a 3-színezhetőség a csomó tulajdonsága. A 3-színezhetőség tehát csomó-invariáns.

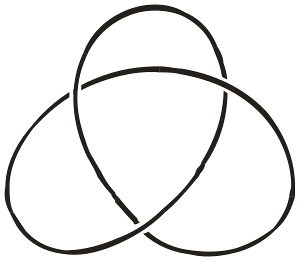
Bizonyítás:
Végezzük el a 3-színezhető csomón előforduló lehetséges kereszteződéseken az R1, R2, R3 átalakításokat!
Az R1-es átalakítás esetében a kereszteződésnél legfeljebb két szín lehet, mert csak két ív találkozik (Ld. 17. ábra), de a csomó 3-színehető, tehát csak 1 szín van a kereszteződésnél. Az átalakítást elvégezve a csomó 3-színezhető marad, hiszen az eredeti színezés megfelelő lesz.
Az R2-es átalakítás előtt a két madzagdarab vagy azonos, vagy különböző színű. (23. ábra) Az átalakítás után a 3-színezhetőség megmarad.
Az R3 átalakításnál ehhez hasonlóan elvégezhetjük a vizsgálatokat.



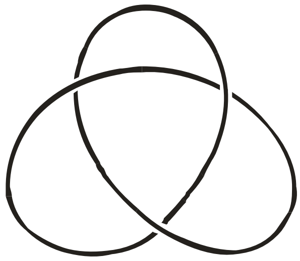
23. ábra

Mivel a triviális csomó nem 3-színezhető (az ismert vetület mindig egyszínű), ezért a triviális csomó nem azonos a háromlevelű csomóval. Ezzel azt is beláttuk, hogy a háromlevelű csomó kicsomózási száma 1, kereszteződési száma pedig 3.

Ezzel a tulajdonsággal azonban csak kevés esetben tudunk csomókat megkülönböztetni egymástól. Például a háromlevelű csomónak két alakja van: a jobb- és balkezes, egyik a másiknak tükörképe (24. ábra). Az nyilvánvaló, hogy 3-színezhető csomó tükörképe is 3-színezhető. Azonban a csomók tükörképei nem feltétlenül azonosak, pl. a két 3-levelű csomó is különböző. Ezt csak később mutatjuk meg.



jobbkezes háromlevelű csomó
24.a. ábra

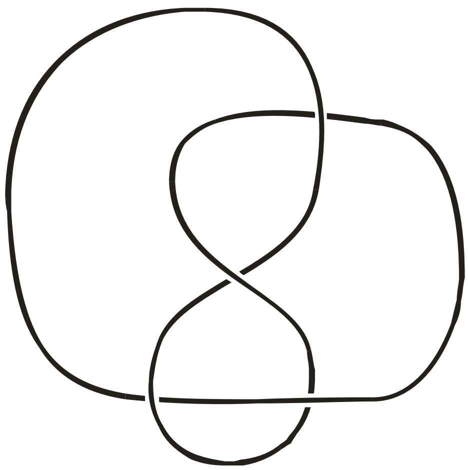


balkezes háromlevelű csomó
24.b. ábra

Persze létezik olyan csomó, aminél a tükörkép megegyezik az eredeti csomóval.

8. (Házi) feladat

Mutassuk meg, hogy a 25. ábrán látható csomó azonos a tükörképével!



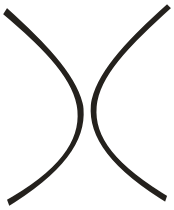
25. ábra

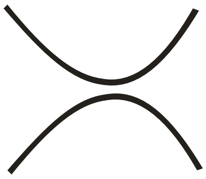
Jó lenne tehát olyan fogalmat definiálni, ami pontosabban leírja a csomókat. Egy megfelelő, „finom” invariáns a Jones polinom, ami a nevéből következően egy polinommal írja le a csomókat, illetve azok vetületeit. Alább először a D csomóvetülethez, diagrammhoz rendelt $<D>$ Jones polinomot értelmezzük, majd megmutatjuk, hogy ez majdnem csomó-invariáns, végül módosítjuk, hogy valódi csomó-invariánst, a V_D polinomot kapjuk. D és V_D értelmezéséhez kilépünk a csomók világából és láncokra is értelmezzük e fogalmakat.

A $<D>$ polinomot alább egy olyan szabályrendszerrel értelmezzük, amely „a kereszteződések eltüntetésével” lehetővé teszi a kiszámolását (O a triviális vetületű csomót, *D*ÈO a *D* és O vetületek diszjunkt, átfedésmentes unióját jelöli). A polinom, nem igazi polinom, hanem úgynevezett Laurent-polinom, az *A* változó hatványai mellett ugyanis A^{-1} hatványai is szerepelnek benne.

<*D*> legyen a csomó *D* diagramjának **Jones polinom**ja, ha teljesül rá az alábbi három tulajdonság:
1. <O> = 1
2. <*D*ÈO> = ($-A^{-2}-A^{2}$) ×<*D*>
3. <d26> = *A*<d27> + A^{-1}<d28>, d26, d27 és d28 a 26., 27. és 28. ábrán látható

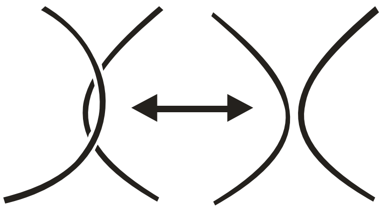

26. ábra

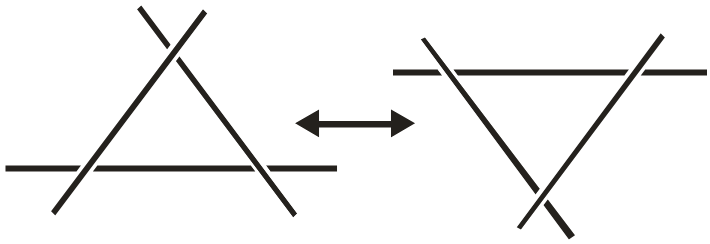

27. ábra


28. ábra

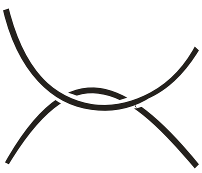
8. feladat

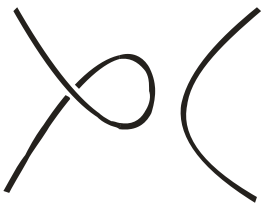
Bizonyítsuk be, hogy a Jones polinom R2-re és R3-ra (17. ábra ill. alább) invariáns!

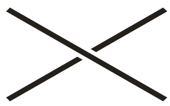


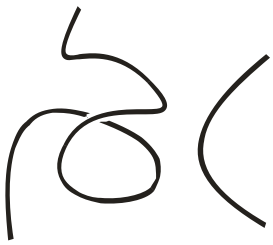


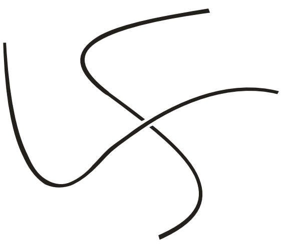
Bizonyítás (R2-re):
<d29> = *A*<d30> + A^{-1}<d31> = *A*<d32> + A^{-1}<d33> = *A*(*A*<d34> + A^{-1}<d35>) + A^{-1} (*A*<d36> + A^{-1}<d37>) = A^{2}<d27> + ($-A^{2}-A^{-2}$)<d27> + <d28> + A^{-2}<d27> = <d28> (d*i* = *i*. ábra alább)

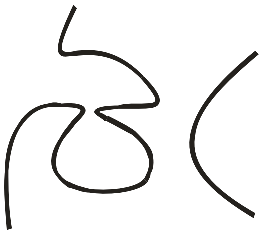

29. ábra

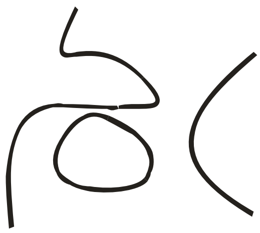

30. ábra


31. ábra

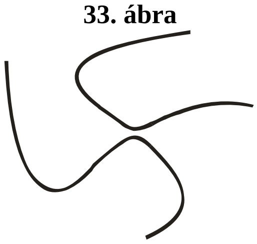

32. ábra

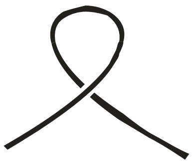

33. ábra

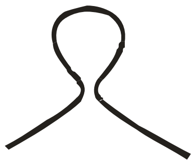

34. ábra

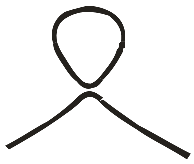

35. ábra


36. ábra


37. ábra


38. ábra


39. ábra


40. ábra

41. ábra

A probléma az, hogy R1-re nem invariáns:
$\langle d38\rangle = A\langle d39\rangle + A^{-1}\langle d40\rangle = A\langle d41\rangle + A^{-1}(-A^{-2}-A^{2})\langle d41\rangle = -A^{-3}\langle d41\rangle$ (itt is di = i. ábra)
Vagyis új mennyiséget kell definiálni, amire már tényleg teljesül, hogy R1, R2 és R3 átalakításokra invariáns.

2.tétel
Jones tétel: $V_k = -A^{-3w(D)}\langle D\rangle$ már valóban invariáns lesz R1, R2 és R3-ra, ahol $w(D)$ a D-ben található összes kereszteződés összeadása a következő módon: a 42.a. ábrán lévő kereszteződés értéke -1, a 42.b. ábraié pedig +1.


42.a. ábra


42.b. ábra

H jelölje a háromlevelű csomót, *HJ* a jobbkezes, *HB* a balkezes csomót. Kiszámolható, hogy a V_k már megkülönbözteti a bal és a jobbkezes háromlevelű csomót:
$V_{HJ} = A^{-12} + A^{-4} - A^{-16}$ $\qquad$ $V_{HB} = A^{12} + A^{4} - A^{16}$.

Vaughan F. R. Jones honlapja: http://math.berkeley.edu/~vfr/
Vaughan F. R. Jones cikke a Jones polinomról kutatóknak (nem a felfedezést rögzítő cikk):
http://math.berkeley.edu/~vfr/jones.pdf

Most is felmerülnek kérdések:
- létezik-e 2 különböző K_1, K_2 csomó, amiknek a Jones polinomjuk megegyezik? Erre a kérdésre a válasz sajnos igen, így látható, hogy a polinom nem tökéletes.
- létezik-e olyan K csomó, ami nem a triviális csomó, de a Jones polinomja triviális, azaz $V_K = 1$ ($=V_0$)? Ez a kérdés még nyitott, mivel még senki sem talált ilyen csomót, de azt se bizonyították be, hogy nem létezik ilyen csomó. A legfeljebb 17 kereszteződési számú csomók közül azonban biztos, hogy csak a triviális csomó Jones polinomja 1. Ez 1997-ből származó eredmény[2].

Vezessünk be egy új változót, aminek segítségével egyszerűbben leírhatóbb a számolás:

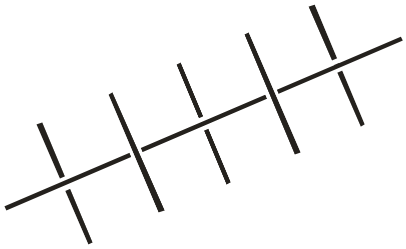
B_K = (legmagasabb kitevő-legkisebb kitevő V_K-ban)/4

3.tétel Ha a D vetületben n duplapont van, akkor $B_K \leq n$

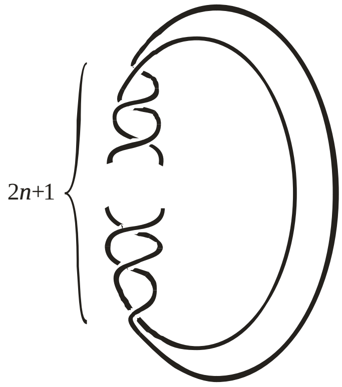
Ezt a tételt egyébként a közelmúltban (1992-ben) sikerült bizonyítani.

4. tétel Ha a D vetület alternáló – tehát bármelyik szálon az azt keresztező ívek felváltva alul és felül jönnek (43. ábra) – és nem egyszerűsíthető, akkor $B_K = n$

[2] Lásd http://math.ucr.edu/~kasten/abs_does.html



43. ábra



44. ábra

Ezek a tételek hasznosak, hiszen például a 44. ábrán látható alternáló vetületnél kiszámolható $c(K_n)$

Klovanov 2004-ben egy újítást vezetett be:

V minden a_i együtthatója helyett számok egy (b_{i1}, b_{i2},… b_{ik}) sorozatát rendelte a csomóhoz. Ezekből az alábbi táblázatba rendezett formából az a_i együtthatók is megkaphatók.

$$\begin{array}{ccccc}
b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{n1} \\
b_{21} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{n2} \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
. & & & & . \\
\underline{b_{1k}} & \underline{b_{2k}} & \underline{b_{3k}} & \underline{\dots} & \underline{b_{nk}} \\
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n
\end{array}$$

Az előállító formula a $b_{i1} - b_{i2} + b_{i3} - \dots = a_i$ alternáló összeg. A b_{ij} számok, tehát a fenti számtáblázat elemei már jobban megkülönböztetik a csomókat. Segítségükkel 2005-ben Rasmussen igazolta, hogy $u(K_n) = n$, addig csak annyit tudtak, hogy $u(K_n) \geq n$.

Így egyszerűsödik a számítás például a bogozási relációnál:

$A^4 \cdot V_{L+} - A^{-4} \cdot V_{L-} = (A^{-2} - A^2) \cdot V_{L0}$ ahol V_{L+} a 42.a..ábrán, V_{L-} a 42.b. ábrán és V_{L0} a 27. ábrán látható.

Colin Adams által 2002-ben ajánlott megoldatlan problémák a csomóelméletben:
http://www.williams.edu/Mathematics/cadams/knotproblems.html
Louis H. Kauffman „Knots and Applications” egyetemi órájához tartozó segédanyagok:
http://www.math.uic.edu/~kauffman/569.html
Louis H. Kauffman weboldalán más fontos linkek is találhatók a témában: http://www.math.uic.edu/~kauffman/
Csomóelmélet a Mathworld enciklopédiában: http://mathworld.wolfram.com/Knot.html
Rimányi Richárd: A csomók elmélete , Természet Világa, 1998. III. különszám, Matematika különszám
David Eppstein: The Geometry Junkyard, Csomók: http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/knot.html
The KnotPlot Site: http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html
A Wales Egyetem (Bangor) Informatikai Intézetének „Matematika és csomók” kiállítása:
http://www.popmath.org.uk/exhib/knotexhib.html