A Minkowski-tétel és alkalmazásai

Tomon István

Nikolai Dolbilinnak a 2007. Júliusi dubnai nyári matematikai iskolán[?] „Minkovsky theorem on convex polytopes and its applications” címmel elhangzott előadását jegyezte le és egészítette ki bizonyításokkal Tomon István, akkor 10-es diák.

Az ábrák elkészítésében a CorelDraw program alkalmazásával Véges Márton diák nyújtott segítséget.

A cikk létrehozását az „Együtt tanítunk” pályázat keretében a Fazekas Mihály Oktatási Kulturális és Sport Alapítvány támogatta.

?

Tartalomjegyzék

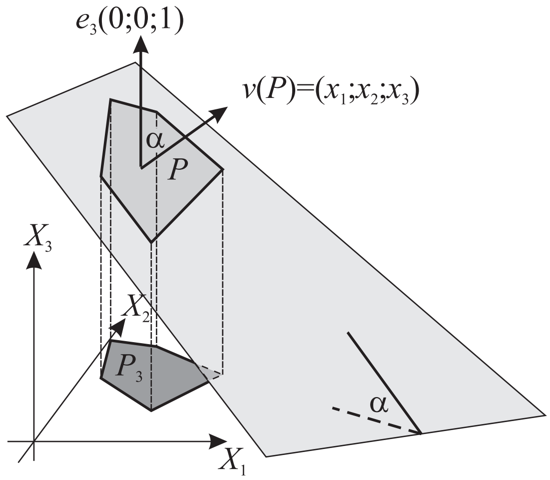
1. Előszó

Ebben a cikkben Minkowskinak azon érdekes tételével foglalkozunk, mely szerint szerint egy konvex test egyértelműen megadható, ha tudjuk az oldalainak a területét és az irányát. Magát a tételt nem bizonyítjuk, de megmutatjuk néhány alkalmazását, főleg a parkettázások területén.

2. Minkowski-tétel

Definició 1 *Legyen S konvex test. Állítsunk S-nek az oldallapjaira kifelé az oldallapokra merőleges, a területükkel megegyező hosszúságú vektorokat. Ezeknek a vektoroknak a halmazát S sündisznóhalmazának nevezzük és $H(S)$-sel jelöljük.*

Legyen P a konvex test egyik lapja, a rá merőleges, kifelé mutató vektor $v(P)$, a P lap egy pontja U, a poliéder egy tetszőleges másik pontja V. A test konvexsége pontosan azt jelenti, hogy a $v(P) \cdot \overrightarrow{UV}$ skalárszorzat értéke nempozitív és pontosan akkor 0, ha V is a P lapon van.



1. ábra: Lap normálvektora és verülete

Tétel 1 *Tetszőleges S konvex test esetén $H(S)$ elemeinek összege* 0.

Bizonyítás: Helyezzük a testet térbeli koordináta-rendszerbe, ahol a tengelyek X_1, X_2, X_3. Vetítsük S-et merőlegesen az X_i tengelyre merőleges síkba ($i = 1, 2, ..., n$) és vizsgáljuk S-nek egy P oldallapját és P vetületét. Legyen $v(P) = (x_1, x_2, x_3)$ a P oldallapra kifelé merőleges, a területével megegyező hosszúságú vektor és legyen P merőleges vetülete P_i.

Állítjuk, hogy P_i területe $|x_i|$. Legyen az X_i-re merőleges hipersík és a P hipersíkja által bezárt szög α. A P_i terület a P lap területének $(\cos\alpha)$-szorosa, s mivel ekkor v vektor és az X_i sík által bezárt szög is α, így $|x_i| = |v|\cos\alpha$, ami igazolja állításunkat, hiszen a definíció szerint $|v|$ a P területe.

Érdemes a vetületet területét előjelesen értelmezni. Tekintsük az X_1, X_2, X_3 tengelyek irányában álló

$$e_1(1; 0; 0), \qquad e_2(0; 1; 0), \qquad e_3(0; 0; 1)$$

egységvektorokat. Az

$$e_i \cdot v = |v|\cos(e_i, v) \tag{1}$$

skaláris szorzat előjeles területértéket ad, ami attól függően pozitív, nulla illetve negatív, hogy e_i és v szöge hegyesszög, derékszög vagy tompaszög. A skaláris szorzat koordinátás alakja szerint

$$e_i \cdot v = x_i \tag{2}$$

Ha S minden oldallapjára összegezzük az oldallapnak az $X(i)$-re merőleges koordinátasíkra vonatkozó előjeles merőleges vetületét, akkor 0-t kapunk, mert S vetületének minden pontja két oldallap által van lefedve és – alább részletezzük miért – egyszer pozitív, másszor negatív előjellel számoljuk. Tehát ha minden oldallapra összeadjuk x_i-t, akkor is 0-t kapunk. Így a $v(P)$ vektorok összege a nullvektor, hiszen az összeg minden koordinátája 0. Az állítást igazoltuk.

Megvizsgáljuk miért szerepel a vetület egy pontja egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel. Legyen a vetület egy pontja Q, amely a poliéder U illetve V lapján elhelyezkedő Q_U, illetve Q_V pont vetülete. A Q_UQ_V szakasz a poliéder két pontját köti össze. Ha u és v az U, V lapok kifelé mutató normálvektora, akkor a poliéder konvexsége szerint

$$u \cdot \overrightarrow{Q_UQ_V} < 0, \qquad v \cdot \overrightarrow{Q_VQ_U} < 0. \tag{3}$$

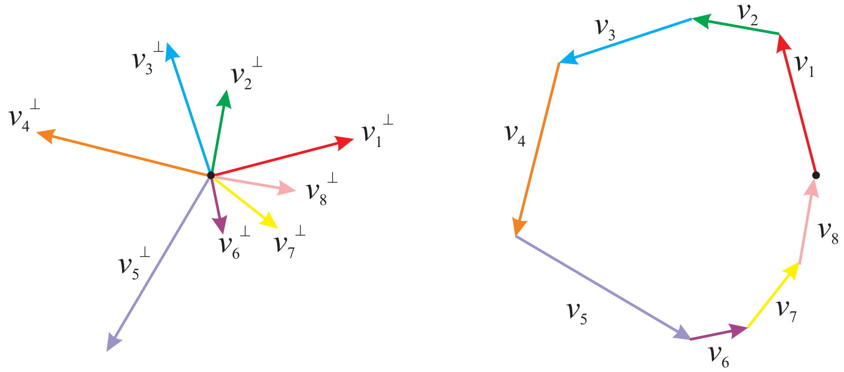
Másrészt a vetületi sík e_i normálvektora párhuzamos a Q_uQ_v szakasszal, tehát (3) miatt

$$e_i \cdot u, \qquad \text{és} \qquad e_i \cdot v \tag{4}$$

ellenkező előjelű. Épp ezt akartuk igazolni (lásd a (2) összefüggést).

Tétel 2 *(Minkowski-tétel)*
Ha adott vektorok egy H halmaza a térben, és nincs minden vektor egy síkban, nincs két egyirányú vektor és az összes vektor összege 0, *akkor pontosan egy olyan konvex S test van, amelyre $H = H(S)$, azaz létezik olyan S, aminek a sündisznóhalmaza H és ez az S test egyértelmű (két testet akkor tekintünk különbözőnek, ha eltolással nem vihetők egymásba).*

Megjegyzés: Minkowski tétele tetszőleges dimenzióban igaz. Az n dimenziós térbeli poliéder lapjai $(n-1)$ dimenziós hipersíkok részei, ezeknek is értelmezhető az $(n-1)$ dimenziós területe (hossza vagy térfogata) és a kifelé álló normálvektora. Az $n > 3$ esetekben ezt nehéz elképzelnünk, míg az $n = 2$ eset egyszerű. Ilyenkor $H(S)$ azon vektorok halmaza, amiket úgy kapunk, hogy S oldalaira kifelé az adott oldallal megegyező hosszúságú vektort állítunk.



2. ábra: Minkowski tétele 2 dimenzióban

Ebben az esetben a Minkowski-tétel könnyen bizonyítható, ugyanis ha adott a 2-dimenziós vektorok egy H halmaza, ahol nincs minden vektor egy egyenesen és a vektorok összege 0, akkor a megfelelő S-et úgy kaphatjuk meg, hogy a H vektorait egy pontba toljuk, elforgatjuk 90°-kal. Az így kapott vektorok közül az egyiket kiválasztjuk majd az ezzel a vektorral bezárt előjeles szögük szerinti növekvő sorrendben a vektorokat egymás után fűzzük. Ekkor mivel az összegük 0, így egy sokszöget kapunk, ami konvex lesz, mivel szögük szerint sorban fűztük a vektorokat egymás után és a sündisznóhalmaza H lesz.

3. A Minkowski-tétel alkalmazásai

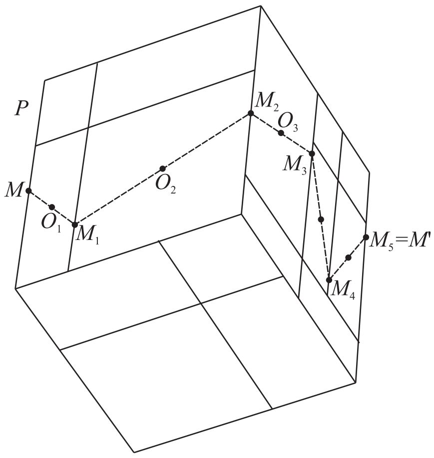
Tétel 3 *Ha egy S konvex n-dimenziós test sündisznóhalmaza középpontosan szimmetrikus, azaz $v \in H(S)$ esetén $-v \in H(S)$, akkor S is középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt módon, hogy S nem középpontosan szimmetrikus és tükrözzük S-et egy tetszőleges O pontra, legyen az így kapott test S'. Ekkor S és S' nem vihető egymásba eltolással, tehát különbözők, de mivel $H(S)$ középpontosan szimmetrikus, így $H(S) = H(S')$, ami a Minkowski-tétel alapján lehetlen, mivel minden sündisznóhalmazhoz pontosan egy test létezik. Így szükségképpen S középpontosan szimmetrikus.

Megjegyzés: Ehhez hasonlóan bebizonyítható, hogy ha egy test sündisznóhalmaza rendelkezik valamilyen szimmetriával, akkor a test is rendelkezik ezzel a szimmetriával.

Tétel 4 *Ha egy (n-dimenziós) S konvex test kiparkettázható véges sok középpontosan szimmetrikus konvex testtel hézagmentesen és átfedés nélkül, akkor S is középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: Tekintsük S egy parkettázását, ahol a parketták a $G = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ halmaz elemei, ahol A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ középpontosan szimmetrikus konvex test és a középpontja O_i. Válasszuk ki az S test egyik P oldallapját és vizsgáljuk ennek egy tetszőleges M pontját. Tegyük fel, hogy M az A_1 parketta határpontja (ha több ilyen parketta is van, akkor válasszuk ki az egyiket) és legyen M_1 az M pont O_1-re vonatkozó tükörképe (lásd a 3. ábrát).



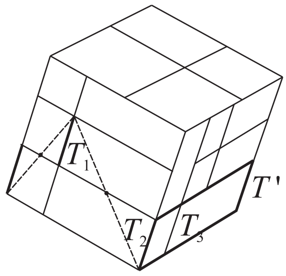
3. ábra: Paralelogrammákkal kiparkettázott hatszög I.

Ekkor M_1 vagy határpontja S-nek, vagy egy másik parkettának is határpontja. Ha az utóbbi teljesül, akkor tegyük fel, hogy ez az A_2 parketta és legyen az M_1 pont 0_2-re vonatkozó tükörképe M_2. S így tovább haladva megkapjuk az $M_1, M_2, ..., M_l$ véges sorozatot, ahol M_l az S egy határpontja.

Ez a sorozat azért lesz véges, mert az $M_1, M_2, ..., M_l$ pontok távolsága nő P-től, így minden parkettán két M_i pont lehet és mivel véges sok parketta van, így a sorozat is véges lesz. Legyen $G(M)$ azon parketták halmaza, amelyek középpontjaira tükröztünk az M_i sorozat létrehozása közben és nevezzük az $M' = M_l$ pontot az M képének S-en.

Ekkor P minden pontjához hozzárendeltünk egy halmazt, s színezzük azokat a pontokat egyszínűre, amelyekhez ugyanazt a halmazt rendeltük. Mivel G véges és $G(M) \in G$, így P véges sok színnel van színezve, s könnyen látható, hogy az azonos színű pontok egy konvex tartományt alkotnak. Ekkor egy egyszínű T tartomány képe nyilván egy T-vel egybevágó és párhuzamos T' tartomány lesz. Ez a T' tartomány rajta van S egy oldallapján, ami párhuzamos lesz P-vel, s mivel S konvex, így egyetlen P-től különböző P-vel párhuzamos oldallapja lehet, legyen ez P', s ekkor minden tartomány képe szükségképpen ezen az oldalon lesz.

P'-re is igaz, hogy minden pontjának a képe P egy pontja, ezenkívül két diszjunkt tartomány képe diszjunkt marad, mivel ez a leképezés bijekció, tehát P és P' területe (hossza vagy térfogata) megegyezik, mivel a tartomány és a képének a területe megegyezik. Vagyis azt kaptuk, hogy S sündisznóhalmaza középpontosan szimmetrikus, így **Tétel 3** alapján S is középpontosan szimmetrikus.



4. ábra: Paralelogrammákkal kiparkettázott hatszög II.

Megjegyzés: Ha a feltételekből elhagyjuk, hogy S konvex, akkor úgy már nem igaz az állítás, például három egyforma (hiper)kockát tetszőleges módon egymás mellé rakva, hogy az uniójuk egy testet alkosson, az így kapott test nem lesz középpontosan szimmetrikus.

Az a feltétel viszont, hogy a parketták is konvexek legyenek, nem szükséges, ugyanez a bizonyítás ebben az esetben is működik, apró változtatásokkal.

Definició 2 *Egy (n-dimenziós) S konvex testet akkor nevezünk parallelohedrának, ha az eltolt képeivel kiparkettázható az (n-dimenziós) tér átfedés nélkül hézagmentesen (a tér minden pontja valamely parketta belső, vagy határpontja, de két parkettának nincs közös belső pontja).*

Nem nehéz belátni, hogy $n = 2$ esetén a parallelohedrák a paralelogrammák és a középpontosan szimmetrikus hatszögek.[1]

Tétel 5 *(Minkowski) Minden parallelohedra középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: Legyen S egy parallelohedra és tekintsük a tér egy tetszőleges parkettázását S-sel. A parkettázás során ha a tér egy pontja egy parketta belső pontja, akkor az a pont egyszeresen van lefedve, ha határpont, akkor pedig legalább kétszer kell, hogy lefedve legyen. Tekintsük S egy tetszőleges $(n-1)$-dimenziós P oldallapját. Ha nem lenne S-nek egy ezzel párhuzamos oldala, akkor a P és egy másik parketta metszete legfeljebb $(n-2)$ dimenziós lehet, ha nincs közös belső pontjuk, így P pontjait nem lehet legalább kétszeresen lefedni. Tehát S-nek lesz egy P-vel párhuzamos oldala, legyen ez P'.

Megmutatom, hogy P és P' oldallapok $(n-1)$-dimenziós térfogata megegyezik. Tegyük fel indirekt módon, hogy nem igaz és legyen P $(n-1)$-dimenziós térfogata k és P'-é z, ahol $k < z$ és színezzük a parketták P-beli pontjait kékre, a P'-beli pontjait zöldre. Ekkor nyilván ha a tér egy pontja színes, akkor egyszerre kék és zöld is, tehát az n-dimenziós tér akármilyen korlátos ponthalmazát is választjuk ki, a benne lévő kék és zöld pontok $(n-1)$-dimenziós össztérfogata megegyezik.

Válasszuk az egyik legegyszerűbben kezelhető korlátos ponthalmazt, a hiperkockát és vizsgáljuk ebben a kék és zöld pontok össztérfogatát.

Legyen S-nek az n-dimenziós térfogata V és foglaljuk bele S-et egy b oldalú n-dimenziós hiperkockába, amelynek az egyik oldallapja párhuzamos P-vel. Értelmezzük a $K, Z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvényeket a következőképpen: válasszunk ki a térben egy tetszőleges x oldalú hiperkockát, amelynek az oldalai párhuzamosak az S-et magába foglaló b oldalú hiperkockával, s legyen $K(x)$ és $Z(x)$ az ebben a kockában lévő kék és zöld pontok $(n-1)$-dimenziós össztérfogata. Ekkor nyilván $K(x) = Z(x)$.

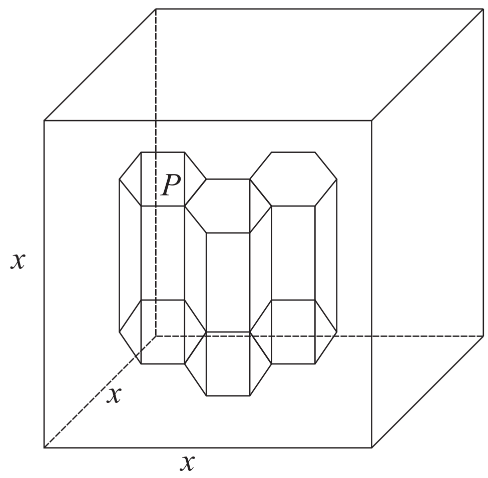
Becsüljük $K(x)$-et felülről! Az összes olyan parketta, amelynek van közös pontja az x oldalú hiperkockával, az benne van abban az $(x+2b)$ oldalú hiperkockában, amelynek az oldallapjai b távolságra vannak az x oldalú hiperkocka oldallapjaitól, így ezen parketták száma legfeljebb

$$\frac{1}{V}(x+2b)^n$$

s így a kék pontok $(n-1)$-dimenziós térfogatára

$$K(x) < \frac{k}{V}(x+2b)^n.$$

[1] A témát érintően lásd Reiman István írását a Matematikai mozaikban[?]



5. ábra

Most becsüljük $Z(x)$-et alulról! Az x oldalú hiperkocka minden olyan parkettát tartalmaz, amely érinti a belsejében lévő, az oldallapjaitól b távolságra lévő $(x-2b)$ oldalú hiperkockát, így legalább

$$\frac{1}{V}(x-2b)^n$$

ilyen parketta van (feltéve, hogy $x > 2b$). S ekkor az x oldalú hiperkockában lévő zöld pontok $(n-1)$-dimenziós össztérfogatára

$$Z(x) > \frac{z}{V}(x-2b)^n.$$

Tehát összefoglalva azt kaptuk, hogy minden $x > 2b$ esetén

$$\frac{z}{V}(x-2b)^n < Z(x) = K(x) < \frac{k}{V}(x+2b)^n$$

ám

$$\frac{z}{V}(x-2b)^n$$

főegyütthatója $\frac{z}{V} > \frac{k}{V}$, ami a

$$\frac{k}{V}(x+2b)^n$$

főegyütthatója, így elég nagy x esetén

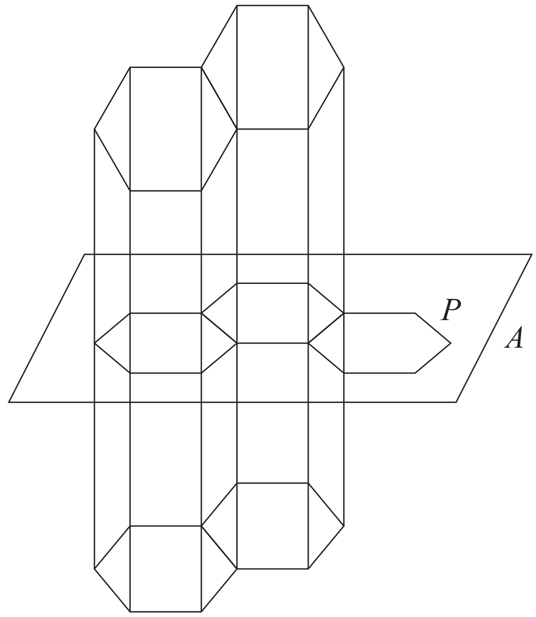
$$\frac{z}{V}(x-2b)^n > \frac{k}{V}(x+2b)^n$$

tehát ellentmondásra jutottunk, tehát P és P' térfogata megegyezik. Ezt S bármely oldalára végigcsinálhatjuk, s ekkor megkapjuk, hogy $H(S)$ középpontosan szimmetrikus, vagyis **Tétel 3** alapján S is középpontosan szimmetrikus.

Tétel 6 *(Minkowski)*
Ha S egy n-dimenziós parallelohedra, akkor az $(n-1)$-dimenziós oldallapjai is középpontosan szimmetrikusak.

Bizonyítás: Vezessünk be néhány jelölést: jelentse $V_n(H)$ a H halmaz n-dimenziós térfogatát, ha ezt lehet értelmezni.

Tegyük fel indirekt módon, hogy S-nek van egy olyan oldallapja, ami nem középpontosan szimmetrikus, legyen ez P. **Tétel 4** alapján S középpontosan szimmetrikus, így legyen P középpontos tükörképe P'. Tekintsünk egy tetszőleges S_0 parkettát és nézzük az ennek a P oldallapját tartalmazó $(n-1)$-dimenziós hipersíkot, legyen ez A. Nézzük azokat a parkettákat, amelyeknek az egyik oldallapja rajta van A-n és



6. ábra

legyen H ezen oldallapok uniója. Ekkor H kiparkettázható a P $(n-1)$-dimenziós testtel és a P'-vel is, mivel P minden pontja vagy egy P' belső pontja, vagy több P' határpontja. Ekkor H több összefüggő, zárt (nem feltétlenül korlátos) halmaz úniója.

Mivel P nem középpontosan szimmetrikus, így **Tétel 3** alapján létezik olyan Q $(n-2)$-dimenziós oldallapja, amihez nincs vele párhuzamos, vele megegyező területű oldallapja P-nek. Legyen Q^* a P-ben Q-val párhuzamos oldal, s ha nincs ilyen, akkor Q^* a P-ben Q-tól legtávolabb lévő pontok halmaza.

Legyen H parkettázása P-vel Φ és P'-vel Φ'. Jelentse $R(\Phi)$ a Φ parkettázásban a Q oldalak halmazát, $R^*(\Phi)$ pedig a Q^* oldalak halmazát és jelentse $R(H)$ a H halmaz Q-val ellentétes irányú határolólapjainak a halmazát (azaz a lapra kifelé állított merőleges ellentétes irányú a Q-ra kifelé állított merőlegessel) és $R^*(H)$ a H halmaz Q-val megegyező irányú oldallapjainak a halmazát. Ekkor nyilván

$$R(\Phi) \cup R(H) = R^*(\Phi) \cup R^*(H)$$

és $R(\Phi) \cap R(H) = 0$ és $R^*(\Phi) \cap R^*(H) = 0$.

Először tegyük fel, hogy H korlátos, és Φ-ben k darab parketta van. Ekkor

$$V_{n-2}(R(\Phi)) = kV_{n-2}(Q)$$

és

$$V_{n-2}(R^*(\Phi)) = kV_{n-2}(Q^*)$$

vagyis az eddigieket összefoglalva

$$kV_{n-2}(Q) + V_{n-2}(R(H)) = V_{n-2}(R(\Phi) \cup R(H)) =$$

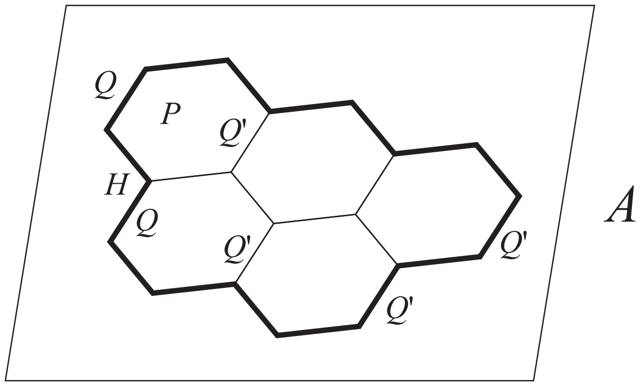
$$= V_{n-2}(R^*(\Phi) \cup R^*(H)) = kV_{n-2}(Q^*) + V_{n-2}(R^*(H)).$$

Ám hogyha a Φ' parkettázást nézzük, akkor az is nyilván k parkettát tartalmaz és P'-ben a Q^* középpontos tükörképeképe a Q-val megegyező irányú lap, így ugyanezeket levezetve azt kapjuk, hogy

$$kV_{n-2}(Q^*) + V_{n-2}(R(H)) = V_{n-2}(R(\Phi') \cup R(H)) =$$

$$= V_{n-2}(R^*(\Phi') \cup R^*(H)) = kV_{n-2}(Q) + V_{n-2}(R^*(H)),$$

vagyis a két egyenlőségláncot összevetve azt kapjuk, hogy $V_{n-2}(Q) = V_{n-2}(Q^*)$, ami ellentmondás, tehát ebben az esetben kész vagyunk.



7. ábra

Marad az az eset, amikor H nem korlátos. Legyen O egy tetszőleges H-beli pont és legyen $H_0(x)$ egy O középpontú x oldalú $(n-1)$-dimenziós hiperkocka és a H metszete. Legyen $R_0(\Phi) = H_0(x) \cap R(\Phi)$ és hasonlóan definiáljuk az $R_0^*(\Phi)$ halmazt is. Az előzőekhez hasonlóan megkaphatjuk, hogy

$$V_{n-2}(R_0(\Phi)) + V_{n-2}(R(H_0(x))) = V_{n-2}(R_0^*(\Phi)) + V_{n-2}(R^*(H_0(x)))$$

és a Φ' parkettázást nézve

$$V_{n-2}(R_0(\Phi')) + V_{n-2}(R(H_0(x))) = V_{n-2}(R_0^*(\Phi')) + V_{n-2}(R^*(H_0(x)))$$

vagyis a két egyenlőséget összevetve

$$V_{n-2}(R_0(\Phi)) + V_{n-2}(R_0^*(\Phi')) = V_{n-2}(R_0(\Phi')) + V_{n-2}(R_0^*(\Phi)).$$

Nyilván feltehetjük, hogy $V_{n-2}(Q) > V_{n-2}(Q^*)$. Legyen $k(x)$ a legnagyobb olyan szám, hogy H akármilyen P-vel vagy P'-vel történő parkettázása esetén $H_0(x)$ tartalmaz legalább $k(x)$ parkettát teljesen, s legyen $k^*(x)$ az a legkisebb szám, hogy ilyen parkettázások esetén $H_0(x)$-nek legfeljebb $k^*(x)$ parkettával van közös pontja. Ekkor

$$V_{n-2}(R_0(\Phi)) + V_{n-2}(R_0^*(\Phi')) \geq V_{n-2}(Q)k(x)$$

és

$$V_{n-2}(R_0(\Phi')) + V_{n-2}(R_0^*(\Phi)) \leq V_{n-2}(Q^*)k^*(x)$$

tehát

$$V_{n-2}(Q^*)k^*(x) \geq V_{n-2}(Q)k(x).$$

Ezt alakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{V_{n-2}(Q^*)}{V_{n-2}(Q)} \geq \frac{k(x)}{k^*(x)}$$

ahol $\frac{V_{n-2}(Q^*)}{V_{n-2}(Q)}$ egy 1-nél kisebb érték, míg megmutatom, hogy a $\frac{k(x)}{k^*(x)}$ függvény x változtatásával akármilyen 1-hez közeli értéket felvehet, ami nyilván ellentmondana az egyenlőtlenségnek.

Legyen b annak a legkisebb $(n-1)$-dimenziós hiperkockának az oldala, amely tartalmazza P-t és az oldalai párhuzamosak az x oldalú hiperkocka oldalaival. Ekkor ha egy parketta benne van H-ban, akkor érinti azt az $(x-2b)$ oldalú hiperkockát, aminek középpontja O és az oldalai b távolságra vannak az x oldalú hiperkocak oldalaitól. Így $k(x)$-re definíciója alapján

$$k(x) \geq \frac{V_{n-1}(H_0(x-2b))}{V_{n-1}(P)}.$$

Ha egy parkettának van közös pontja $H_0(x)$-szel, akkor nyilván benne van abban az O középpontú $(x+2b)$ oldalú hiperkockában, aminek az oldalai b távolságra vannak az x oldalú hiperkocka oldalaitól, így azt kapjuk, hogy

$$k^*(x) \leq \frac{V_{n-1}(H_0(x+2b))}{V_{n-1}(P)}.$$

Mivel $k^*(x) \geq k(x)$, így elég bizonyítani, hogy

$$\frac{V_{n-1}(H_0(x-2b))}{V_{n-1}(H_0(x+2b))}$$

akármilyen $(1-\varepsilon)$-nál nagyobb értéket felvehet megfelelő x esetén, ahol $\varepsilon > 0$. Nézzük az $x = 6b, 10b, ..., (4i+2)b, ...$ helyettesítési értékeket $(i = 1, 2, ...)$ és legyen

$$t_i = \frac{V_{n-1}(H_0(4ib))}{V_{n-1}(H_0(4ib+4b))}.$$

Ekkor

$$t_1 t_2 ... t_{l-1} = \frac{V_{n-1}(H_0(4b))}{V_{n-1}(H_0(4lb))}$$

Legyen $u = V_{n-1}(H_0(4b)) \neq 0$, ezenkívül használjuk, hogy $H_0(x)$ benne van egy $(n-1)$-dimenziós x oldalú hiperkockában, így $H_0(x) \leq x^{n-1}$, vagyis

$$t_1 t_2 ... t_{l-1} \geq \frac{u}{(4lb)^{n-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $t_1, t_2, ..., t_{l-1}$ számok közül a legnagyobb nagyobb, mint

$$\sqrt[l-1]{\frac{u}{(4lb)^{n-1}}}$$

s mivel ez a kifejezés 1-hez tart, ha l végtelenhez, így bebizonyítottuk, hogy $\frac{k(x)}{k^*(x)}$ akármilyen 1-hez közeli értéket felvehet, s ezzel ellentmondásra jutottunk. Ezzel a tétel állítása be van bizonyítva.

Definició 3 *Legyen S egy n-dimenziós konvex test aminek az $(n-1)$-dimenziós oldallapjai középpontosan szimmetrikusak. Válasszuk ki S egy P_0 oldallapját és annak egy Q_0 $(n-2)$-dimenziós lapját. Legyen Q_1 a Q_0 oldal P_0 középpontjára vonatkozó középpontos tükörképe. Tegyük fel, hogy a P_1 oldal szomszédos P_0-lal Q_1-ben és legyen Q_2 a Q_1 tükörképe P_1 középpontjára. S így tovább megkapjuk a $P_0, ..., P_{k-1}$ és $Q_0, ..., Q_{k-1}$ sorozatot, ahol Q_k tükörképe P_{k-1} középpontjára Q_0. Nevezzük övnek a $Q_0, Q_1 ..., Q_{k-1}$ sorozatot és legyen k az öv hossza.*

Tétel 7 *(Minkowski)*
Ha S egy $(n \geq 2)$-dimenziós parallelohedra, akkor minden öv hossza 4 vagy 6.

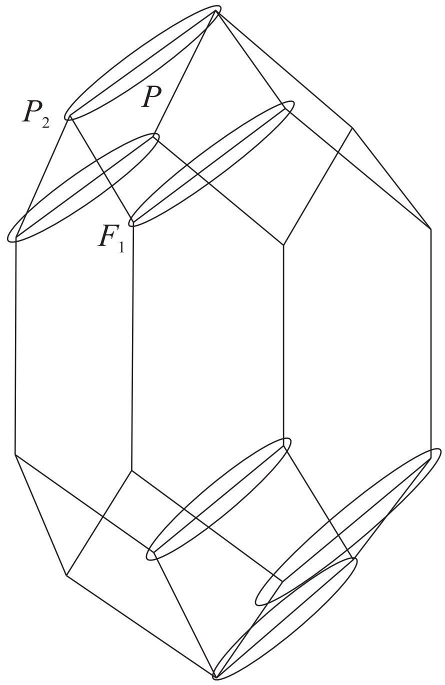
Bizonyítás: Tekintsük a tér egy tetszőleges parkettázását S-sel és legyen Ψ az S egy öve. Legyen A egy 2-dimenziós sík, amely merőleges a Ψ-ben lévő $(d-2)$ dimenziós oldallapokra, és belemtesz valamely parketta övébe. Tekintsük azokat a parkettákat, amelyek Ψ övébe belemetsz A és vetítsük le ezeket A-ra. Ekkor könnyen látható, hogy A egy parkettázását kapjuk, s mivel csak a paralelogramma és a középpontosan szimmetrikus hatszög a 2-dimenziós parallelohedrák, így az öv hossza is 4 vagy 6.

Tétel 8 *Ha egy n-dimenziós $(n \geq 3)$ konvex S test $(n-1)$ dimenziós oldallapjai középpontosan szimmetrikusak, akkor az S is középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: Az $(n-2)$-dimenziós F lap esetén jelentse $\Psi(F)$ azon $(n-1)$ dimenziós P lapok halmazát, melyek egyik oldala az F-hez tartozó övben van. Legyen P_0 az S egy oldallapja és legyen

$$H = \bigcap_{F \subset P_0} \Psi(F).$$

Ekkor $H \setminus \{P_0\} \neq 0$, ugyanis legyen F_1 és F_2 a P_0 két különböző $(n-2)$-dimenziós oldallapja, ekkor a $\Psi(F_1) \cap \Psi(F_2)$ halmaz két elemet tartalmaz, P_0-t és egy másik P_1 lapot. Legyen P_1 és az F_1-hez tartozó



8. ábra

öv metszete F_1', P_1 és az F_2-höz tartozó öv metszete F_2'. Ekkor $F_1 \parallel F_1'$ és $F_2 \parallel F_2'$, így az F_1 és F_2 által meghatározott $(n-1)$-dimenziós hipersík párhuzamos az F_1' és F_2 által kifeszített hipersíkkal, tehát $P_0 \parallel P_1$. S mivel S konvexitása miatt legfeljebb egy oldallap lehet párhuzamos P_0-lal, így bármely két $F_1, F_2 \subset P_0$ oldallapra

$$\Psi(F_1) \cap \Psi(F_2) = \{P_0, P_1\}$$

vagyis

$$\bigcap_{F \subset P_0} \Psi(F) = \{P_0, P_1\}.$$

S ez azt jelenti, hogy P_0 és P_1 oldalai páronként megegyeznek és párhuzamos, vagyis a Minkowski-tétel alapján P_0 és P_1 megegyezik, s ekkor ismét a Minkowski-tételt használva maga S is középpontosan szimmetrikus.

4. Továbbbi eredmények

Ebben a részben ezen témakör további eredményeit mutatom be bizonyítások nélkül.

Legyen P és Q két n-dimenziós konvex test, ekkor P és Q Blaschke-összegének nevezzük azt az R konvex testet, melyre

$$H(R) = H(P) \cup^* H(Q)$$

ahol a * arra vonatkozik, hogy a két halmazban az egyirányú vektorokat összeadjuk. Jelölése

$$R = P\#Q.$$

Mivel $H(P)$-ban és $H(Q)$-ban is 0 az elemek összege, így $H(R)$-ben is, vagyis a Minkowski-tétel szerint R létezik és egyértelmű.

Definició 4 *Valamely P és Q konvex testek esetén a Blaschke-összeget érzékenynek nevezzük, ha tetszőleges $0 < t < t'$ esetén az*

$$R_t = P\#tQ$$

és

$$R_{t'} = P\#t'Q$$

testek párhuzamos oldallapjai páronként különbözők, ahol tQ a Q test egy adott pontból történő t-szeres nagyítását jelöli.

Tétel 9 *Ha P egy n-dimenziós konvex test és Q egy n-dimenziós szimplex, akkor $n > 2$ esetén a Blaschke-összeg érzékeny.*

Ezután nézzünk néhány tételt a parallelohedrákról.

Definició 5 *Legyen S egy n-dimenziós parallelohedra és legyen Ψ a tér egy kitöltése S-sel. Az $F^d \subset S$ lapot, ahol d a lap dimenzióját jelöli ($d \leq n-1$), maximális lapnak hívjuk, ha létezik a Ψ kitöltésben egy S' parallelohedra, hogy $F^d = S \cap S'$.*

Például a középpontosan szimmetrikus hatszöggel való kitöltés esetén a hatszög oldalai maximális lapok, míg a csúcsai ((n-2)-dimenziós lapjai) nem azok.
Nyilván minden maximális lap centrálszimmetrikus, ugyanis ha S szimmmetriközéppontja O és S' szimmetriközéppontja O', akkor az $S \cup S'$ szimmetrikus az OO' szakasz felezőpontjára, ami rajta van F^d-n, így erre F^d is szimmetrikus.

Definició 6 *Ha S egy n-dimenziós parallelohedra és F^d az egyik d-dimenziós lapja, akkor $m(F^d)$ annak a száma, hogy egy parkettázásban hány parallelohedra tartalmazza F^d-t, s ez a szám az F^d foka. F^d indexe pedig a $v(F^d) = \frac{1}{m(F^d)}$ szám. Az F^d lapot primitívnek nevezzük, ha $m(F^d) = n - d + 1$ (ennél kevesebb nem lehet) és maga S akkor primitív parallelohedra, ha minden csúcsa primitív, azaz minden csúcs foka $d+1$.*

Ekkor minden $(n-1)$-diemnziós lap maximális és a fokuk 2. Ezenkívül bizonyítható, hogy az $(n-2)$-dimenziós lapok foka 4, hogyha maximális és 3, hogyha nem maximális.

Ezekután nézzük Minkowski 2. tételét:

Tétel 10 *(Minkowski)*
Egy (n) dimenziós parallelohedra $(n-1)$-dimenziós oldallapjainak a száma nem haladja meg az

$$f_n = 2(2^n - 1)$$

számot és ez a korlát nem javítható, azaz létezik olyan parallelohedra, amelynek az oldallapjainak a száma f_n

A tétel első fele következik az alábbi erősebb tételből:

Tétel 11 *Ha egy S egy n-dimenziós parallelohedra, akkor*

$$\sum_{F \text{ maximális} \subset S} v(F) = 2^n - 1.$$

Mivel minden $(n-1)$-dimenziós lap maximális és a foka 2, így ha f_n' az S lapjainak a száma, akkor

$$2^n - 1 = \sum_{F \text{ maximális} \subset S} v(F) = \sum_{F^{n-1} \subset S} v(F) + \sum_{F^i \text{ maximális} \subset S, i \leq n-2} v(F^i) \geq \frac{1}{2} f_n'$$

tehát

$$f_n' \leq 2(2^n - 1).$$

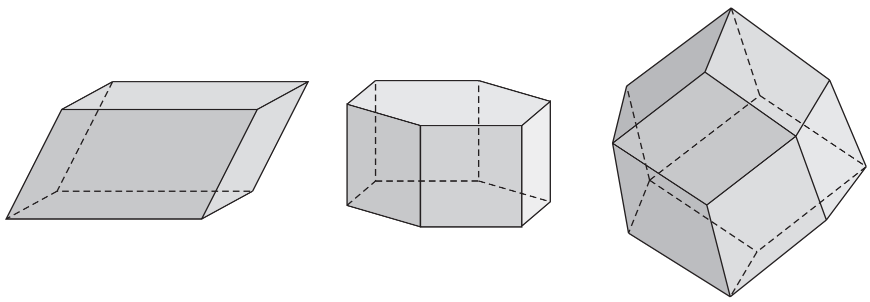
Ezekután nézzük, hogy hogyan kaphatunk parallelohedrákat. Tekintsünk az n-dimenzióban egy n vektor által kifeszített rácsot és vegyük a rácspontok Voronoi-celláit! Egy P rácspont Voronoi-cellája azon pontok halmaza, amelyek semelyik rácsponthoz sincsenek közelebb, mint P-hez. Ezen cellák nyilván parallelohedrákat adnak és ezen parallelohedrákat Voronoi-parallelohedrának hívják. Eddig még nem bizonyított az alábbi sejtés:

Sejtés: *Minden parallelohedra affinítható Voronoi-parallelohedrába.*

Annyit már sikerült bizonyítani, hogy minden primitív parallelohedra affinítható Voronoi-parallelohedrába. Nézzük mi helyzet alacsonyabb dimenziókban:

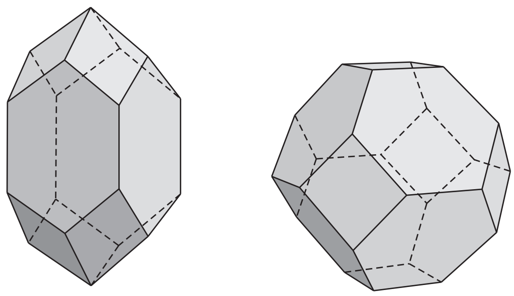
- 2-dimenzióban 2 típus van, a paralelogramma és a középpontosan szimmetrikus hatszög, amelyből a hatszög primitív.

- 3-dimenzióban 5 típus van, amit Fedorov 5 parallelohedrájának hívunk és névszerint a paralelepipedon, a középpontosan szimmetrikus 6-szög alapú hasáb, rombikus dodekaéder (14 csúcs, 24 él, 12 lap), hatszöges dodekaéder (18 csúcs, 28 él, 12 lap) és a csonka oktaéder, ami az egyetlen primitív



9. ábra: Fedorov 5 parallelohedrája - az első három

típus 3-dimenzióban és maximális lapszámmal rendelkezik (24 csúcs, 36 él, 14 lap).



10. ábra: Fedorov 5 parallelohedrája - az utolsó kettő

- 4-dimenzióban összesen 52 típus van és ebből 3 primitív, míg

- 5-dimenzióban összesen 222 primitív típus van és még nem ismert, hogy hány Voronoi-parallelohedra létezik.