Egy 5x5-ös táblázat minden sorába és minden oszlopába pontosan egyszer beírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. A táblázatba beírt számok a táblázat egyik átlójára szimmetrikusan helyezkednek el.

A feltételeknek megfelelő kitöltés esetén mennyi lehet a táblázat szimmetriaátlójában levő számok összege?

Megoldás:

A táblázat egy lehetséges kitöltése a következő:

A D

1	3	2	5	4
2	1	4	3	5
3	5	1	4	2
4	2	5	1	3
5	4	3	2	1

B C

2* pont

A továbbiakban bizonyítani fogjuk, hogy a táblázat feltételeknek megfelelő kitöltése esetén a szimmetriaátlóban (itt BD-ben) az 1; 2; 3; 4 és 5 számok mindegyike előfordul és nyilvánvalóan mindegyik egyszer.

Ha a táblázatot a feltételeknek megfelelően kitöltöttük, akkor minden sorban és minden oszlopban egy darab 1-es, egy darab 2-es, egy darab 3-as, egy darab 4-es és végül egy darab 5-ös van. Ez azt is jelenti, hogy a táblázatban összesen rendre öt darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös van, azaz mindegyikből páratlan számú. 1 pont

Jelöljük ki a táblázat valamelyik, nem a szimmetriaátlóban levő helyét, nem sérti az általánosságot, ha az itt levő számot 1-esnek választjuk. Ilyen a feltételek miatt biztosan van. 1 pont

A szimmetria miatt a kiválasztott helynek a szimmetriaátlóra vonatkozó tükörképe a táblázat olyan helye, ahol szintén 1-es áll. 1 pont

Eszerint minden, a szimmetriaátlóban nem szereplő 1-esnek van a táblázatban egy megfelelő párja, vagyis az ilyen elhelyezkedésű 1-esek párba állíthatók, azaz páros sokan vannak. 2 pont

Mivel azonban a táblázatban összesen páratlan számú 1-es van, ezért legalább az egyik 1-esnek nincs párja, tehát a szimmetriaátlóban kell lennie. Így a szimmetriaátlóban 1; 3, vagy 5 darab 1-es lehet. Hasonlóan bizonyítható, hogy a szimmetriaátlóban ugyanez igaz a 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös számokra is. Mivel a szimmetriaátlóban csak öt hely van, ezért minden számból pontosan csak egy szerepelhet itt. 2 pont

A táblázat, feltételeknek megfelelő bármely kitöltése esetén tehát a szimmetriaátlóban szereplő számok összege $1+2+3+4+5=15$. 1* pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzések:

1) ha a versenyző megad egy helyes kitöltést, például:

A D

1	5	3	4	2
3	2	5	1	4
2	1	4	5	3
4	3	1	2	5
5	4	2	3	1

B C

de nem bizonyítja, hogy a szimmetriaátlóban mind az öt szám pontosan egyszer előfordul, akkor legfeljebb a *-gal jelzett pontokat kaphatja meg.

2) minden $(2n+1)x(2n+1)$-es $(n \in N^{+})$ táblázatra igaz, hogy a feltételeknek megfelelő kitöltés esetén a szimmetriaátlóban az összes $1; 2; 3;...;2n+1$ szám pontosan egyszer előfordul, ezért a szimmetriaátlóban levő számok összege $1+2+3+...+2n+1=2n^2+3n+1$.