1. feladat

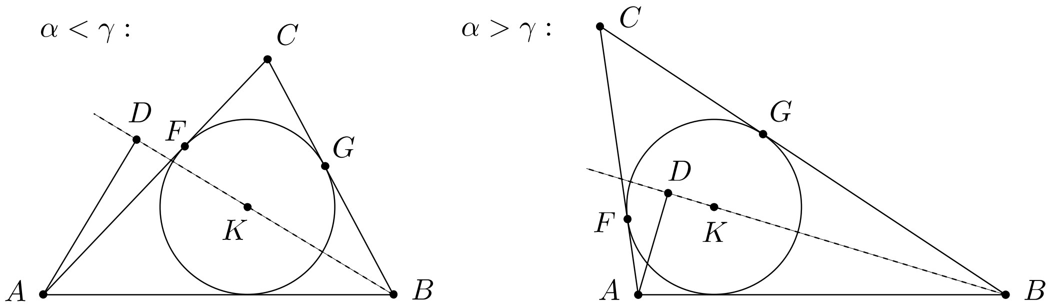
Adott az ABC háromszög. Bocsássunk merőlegest A-ból a B-beli belső szögfelező egyenesre, és B-ből az A-beli belső szögfelező egyenesre. A talppontokat jelölje D, illetve E. Bizonyítsuk be, hogy a DE egyenes a háromszög AC és BC oldalát a beírt kör érintési pontjaiban metszi.

Megoldás: Jelöljük K-val a beírt kör középpontját, F-fel és G-vel a szóban forgó érintési pontokat, azaz K merőleges vetületeit az AC, illetve BC oldalon. A háromszög szögeit a szokásos módon α, β és γ jelöli.

Megmutatjuk, hogy a D pont az FG egyenesre illeszkedik. A pontok szerepcseréjével ezután ugyanúgy igazolható, hogy E is illeszkedik az FG egyenesre, ezek együtt pedig a bizonyítandó állítást vonják maguk után.

A D, F, G pontok kollinearitásának igazolása céljából először vegyük észre, hogy merőleges szárú hegyesszögek lévén $KFG\sphericalangle = FCK\sphericalangle = \gamma/2$. Az ABK háromszög szögösszegét használva látható továbbá, hogy az A-ból és B-ből induló szögfelezők $(\alpha+\beta)/2$ szögben metszik egymást a K pontban.

Ha $\alpha = \gamma$, akkor BF a háromszög szimmetriatengelye és $D = F$, ezért ilyenkor nincs mit bizonyítani. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\alpha < \gamma$, illetve $\alpha > \gamma$. Az $\alpha < \gamma$ esetben a D pont a háromszögön kívülre, az $\alpha > \gamma$ esetben a belsejébe esik.



Mindkét esetben $ADK\sphericalangle = AFK\sphericalangle = \pi/2$, ezért az A, K, D, F pontok egy húrnégyszög csúcsai. Ha $\alpha < \gamma$, akkor D és K, ha pedig $\alpha > \gamma$, akkor F és K szemközti csúcsok ebben a húrnégyszögben. Meghatározzuk a KFD szöget.

Ha $\alpha < \gamma$, akkor $KFD\sphericalangle = \pi - KAD\sphericalangle = \pi/2 + (\alpha+\beta)/2 = \pi - \gamma/2 = \pi - KFG\sphericalangle$,
ha pedig $\alpha > \gamma$, akkor $KFD\sphericalangle = KAD\sphericalangle = \pi/2 - (\alpha+\beta)/2 = \gamma/2 = KFG\sphericalangle$.
Mindkét esetben tehát D, F és G kollineáris pontok.