3. feladat

Az $1, 2, \ldots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldás: Belátjuk, hogy jó játék esetén Boglárka nyer, éspedig általánosabban 2014^{2014} helyett minden 8-cal osztható n esetén ő nyer.

A stratégia lényege, hogy Boglárka az $1, 2, \ldots, n$ számokat olyan párokba osztja, hogy bármely párban az elemek összege négyzetszám legyen, és ha Aladár a pár egyik elemét törli, akkor Boglárka válasza a pár másik elemének a törlése. Ily módon a végén megmaradó két szám éppen egy párt alkot, tehát az összegük négyzetszám, és így Boglárka nyert.

A párosítás megvalósíthatóságát n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 8$, akkor az $(x, 9 - x)$ párok megfelelnek $(1 \leq x \leq 4)$.

Tegyük most fel, hogy n osztható 8-cal, $n \geq 16$, és a 8-nak minden, n-nél kisebb többszöröse esetén létezik a kívánt párosítás. Legyen s^2 az n-nél nagyobb páratlan négyzetszámok közül a legkisebb, és (az alább belátandó $s^2 - n < n$ feltételt megelőlegezve) az $s^2 - n \leq x \leq n$ számok között képezzük az $(x, s^2 - x)$ párosítást. Ha $s^2 = n + 1$, akkor készen vagyunk. Ha $s^2 > n + 1$, akkor az indukció alkalmazható a kimaradó $1, 2, \ldots, s^2 - n - 1$ számokra feltéve, hogy $s^2 - n - 1$ osztható 8-cal és $s^2 - n - 1 < n$. Mivel egy páratlan szám négyzetének a 8-as maradéka 1, ezért $s^2 - n - 1$ osztható 8-cal. Az $n < s^2 < 2n + 1$ feltétel $n = 16$-ra ($s^2 = 25$-tel) teljesül, $n \geq 24$-re pedig azért igaz, mert 25-től kezdve az egymást követő páratlan négyzetszámok hányadosa kisebb, mint 2: $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 < 2$.