586. *Állapítsuk meg az*

$$M = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha $x > 0$.

Megoldás: Tekintsük M mellet még az

$$Y = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

kifejezést, és a két kifejezés szorzatát:

$$MY = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2,$$

azaz:

$$M = \frac{2}{Y}.$$

M tehát akkor lesz nagyobb, hogyha Y a legkisebb. Minthogy pedig $x + \frac{1}{x}$ és $x^2 + \frac{1}{x^2}$ is nem lehet 2-nél kisebb, ha $x > 0$, és ezt a minimumot akkor éri el, ha $x = 1$, az M kifejezés értéke is akkor maximum, ha $x = 1$, amikor $M = 2 - \sqrt{2}$.

Y-nak maxiumuma nincsen, mivel x növekedtével - és ugyanígy, ha x a nulla felé tart, akkor is - Y minden határon túl nő. Így csak annyit mondhatunk, hogy M tart a 0-hoz, ha x tart a végtelenhez vagy a nullához.

Kőváry Károly, Budapest és Szikszai József, Kazincbarcika