Egyenlőtlenségek

1, Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

2, Legyenek az a, b, c, d olyan pozitív valós számok, melyeknek az összege 4. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

3, Igazoljuk a fenti módszerrel, hogy tetszőleges a, b, c pozitív számokra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4, Legyenek a, b, c, d pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

5, Az a, b, c pozitív valós számok összege 3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3.$$

6, Az a, b, c pozitív valós számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geq 1.$$

Közös feldolgozásra

1, Legyenek $0 < a, b, c < 1$ valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

2, Legyenek az a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyeknek összege 3. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

3, Az a, b, c egy olyan háromszög oldalai, amelynek kerülete 3 egység. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-c}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

4, Tudjuk, hogy a pozitív a, b, c, d valós számok összege 4. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$