

Kongruenciákkal kapcsolatos feladatok

1, Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat:

a.) $2x \equiv 3 \pmod{5}$ b.) $3x \equiv 4 \pmod{9}$ c.) $18x \equiv 6 \pmod{30}$

2, Melyek azok a számok, amelyek 2-vel osztva 1-et, 3-mal osztva 2-t és 5-tel osztva 3-at adnak maradékul?

3, Bizonyítsuk be, hogy

a.) $n^{23} + 22n$ osztható 23-mal;

b.) $2k^{66} - 2k^{44} - 2k^{24} + 2k^2$ osztható 1978-cal

4, Számítsuk ki az Euler-féle $\varphi(n)$ függvény értékét a következő n-ek esetén:

a.) $n = 72$

b.) $n = 1000$

c.) $n = 1728$

5, Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a.) $\varphi(2^x) = 128$

b.) $\varphi(5^x) = 600$

c.) $\varphi(3^x \cdot 7^x) = 5392$

6, Állapítsuk meg, hogy 108^{182} mennyi maradékot ad, ha 19-cel osztjuk!

7, Állapítsuk meg, hogy 241^{112} mennyi maradékot ad, ha 23-mal osztjuk!

8, Határozzuk meg 441^{43} szám utolsó két számjegyét!

9, Határozzuk meg 1089^{402} utolsó három számjegyét!

10, Bizonyítsuk be, hogy $20^{50} - 1$ osztható 33-mal!

11, Mutassuk meg, hogy $(x^3 - y^3)$ és $(x - y)$ kongruensek mod 6 !

12, Egy háromjegyű természetes számot 34-gyel osztva 9-et, 26-tal osztva 19-et kapunk maradékul. Melyik ez a természetes szám? Hány megoldása van a feladatnak?

13, Oldjuk meg a következő kongruenciarendszert!

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

14, Legyenek a és b páratlan egész számok, k és n természetes számok. Igazoljuk, hogy ha

$$a^{2k+1} \equiv b^{2k+1} \pmod{2^n},$$

akkor $a \equiv b \pmod{2^n}$.