Nevezetes egyenlőtlenségek, rendezési tétel

1, Mutassuk meg, hogy tetszőleges a és b pozitív valós számokra teljesül az

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^3+b^3}{2}$$

2, Mutassuk meg, hogy tetszőleges a és b valós számokra teljesül az

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\le\frac{a^4+b^4}{2}$$

3, Határozzuk meg a következő kifejezések minimumát:

a.) $x^2+y^2+2x-4y+6$

b.) $x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1$

c.) $2x^2-8xy+17y^2-16x-4y+2010$

Igazoljuk az egyenlőtlenségeket! Milyen esetekben teljesül az egyenlőség?

4, $a^4+b^4+2\ge 4ab$

5, $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

6, $a^2+b^2+c^2+4\ge ab+3b+2c$

7, $a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+ac+ad$

8, $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$

9, $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}$, ahol $abc\ne 0$. 10, $a^2+\frac{1}{a^2+1}\ge 1$

11, Bontsuk fel a 2010-et két részre, hogy a részek szorzata maximális legyen!

12, Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek legkisebb az átfogója?

13, Határozzuk meg az x^2+xy+y^2 kifejezés maximumát és minimumát, ha tudjuk, hogy $1\le x^2+y^2\le 2$

14, Legyenek a, b, c tetszőleges valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$(a+b+c)^2\ge 3ab+3bc+3ca.$$

15, Igazoljuk, hogy az a, b, c pozitív számokra

$$ab^5+bc^5+ca^5\ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

16, Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

17, Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

18, Legyenek x és y olyan pozitív valós számok, amelyekre $x+y=1$. Mutassuk meg, hogy

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\ge\frac{25}{2}.$$