

Algebrai átalakítások haladó szinten

10. szakkör

1, Alakítsuk szorzattá:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

2, Mi annak az algebrai feltétele, hogy $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ teljesüljön?

3, Alakítsuk szorzattá a következő algebrai kifejezéseket:

a.) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 =$

b.) $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 =$

c.) $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (a - b + c)^3 - (-a + b + c)^3 =$

4, Bizonyítsuk be, hogy

$$\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]^2 = 2 \left[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 \right].$$

5, A harmadrendű elemi szimmetrikus polinomok segítségével fejezzük az alábbi hatványösszeget $k = 2, 3, 4, 5$ esetén:

$$a^k + b^k + c^k.$$

(A harmadrendű elemi szimmetrikus polinomok: $u = a + b + c$, $v = ab + bc + ca$, $w = abc$.)

Bizonyítsuk be, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor

(Ez a feltétel a 6. -12. feladatokra végig vonatkozik!)

6, $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2).$

7, $5(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a^5 + b^5 + c^5).$

8, $10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5).$

9, $2(a^5 + b^5 + c^5)^2 = 25a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4).$

10, $4(a^7 + b^7 + c^7) = 7abc(a^2 + b^2 + c^2)^2.$

11, $12(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^3 + b^3 + c^3).$

12, $50(a^7 + b^7 + c^7)^2 = 49(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)^2.$

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

13, $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = .$

14, $\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)} =$

15, Bizonyítsuk be, hogy ha $a \cdot b \cdot c \neq 0$ és az a , b , c valamelyike egyenlő a másik kettő összegével, akkor

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1.$$