Kardos – Montágh – verseny
Feladatok

1. Az *ABC* háromszög hozzáírt köreinek középpontjai *O*, *P*, *Q*, beírt körének középpontja *K*. Melyik állítás igaz az alábbiak közül? *K* az *OPQ* háromszög

A) súlypontja B) magasságpontja C) szögfelezőinek metszéspontja
D) köréírt körének középpontja E) Az előzőek közül egyik sem.

2. Az *ABC* háromszög hozzáírt köreinek középpontjai *O*, *P*, *Q*. Az *OPQ* háromszög szögei 67°, 58°, 55°. Ekkor az *ABC* háromszög két szöge:

A) 67°, 58° B) 46°, 64° C) 48°, 72° D) 61°, 56,5° E) Más érték.

3. Egy háromszög hozzáírt köreinek sugarai 4 cm, 6 cm és 12 cm. Mekkora beírt kör sugara?

A) 4 cm B) 3 cm C) $\frac{5}{2}$ cm D) 2 cm E) $\frac{3}{2}$ cm

4. Egy érintőnégyszög három szomszédos oldalának hossza 10 cm, 12 cm és 14 cm, a négyszög területe 96 cm^2. Hány cm hosszú a beírt kör sugara?

A) 2 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

5. Az *ABC* háromszög köré írt körének sugara 12 cm, beírt körének sugara 3 cm. Mekkora a három hozzáírt kör középpontján átmenő kör sugara?

A) 9 cm B) 16 cm C) 20 cm D) 24 cm
E) Az adatokból nem lehet egyértelműen kiszámolni.

6. Az *ABCD* érintőnégyszögben $AB > AD$. Az *AC* átlót az *ABC* háromszög beírt köre az *E*, az *ADC* háromszög beírt köre pedig az *F* pontban érinti. Melyik igaz az alábbiak közül?

A) $AE > AF$ B) $AE = AF$ C) $AE < AF$ D) $\frac{AB + AF}{2} = AE$
E) *AE* és *AF* nagyságrendi viszonya nem dönthető el.

7. Melyik igaz a háromszög nevezetes köreire vonatkozó állítások közül?

A) A beírt kör érinti a hozzáírt köröket. B) A beírt kör érinti a Feurbach-kört.
C) A hozzáírt körök érintik egymást.
D) Lehetséges, hogy valamelyik hozzáírt kör érinti a köréírt kört.
E) Az előzőek közül egyik sem.

8. Az A és B városok közötti útszakaszt egy vonat először *x*, másodszor *y*, harmadszor pedig *z* átlagsebességgel tette meg. Melyik válasz helyes az alábbiak közül?
A vonat három útra vonatkoztatott átlagsebessége *x*, *y* és *z*

A) számtani közepe B) mértani közepe C) harmonikus közepe
D) egyik nevezetes hatványközepével sem egyenlő
E) Az előző válaszok egyike sem igaz.

9. Három pozitív szám mértani sorozatot alkot. A számok mértani közepe 18, számtani közepe 19. Mekkora a négyzetes közepük?

A) 21,25 B) $\sqrt{420}$ C) 20 D) $\sqrt{399}$ E) Az előzőek közül egyik sem.

10. Három pozitív valós szám közül kettő egyenlő egymással. A számok számtani közepe 14, harmonikus közepe pedig 13,5. Mennyi lehet a számok mértani közepe?

A) $6\sqrt[3]{12}$ B) $9{,}5\cdot\sqrt[3]{3}$ C) $7{,}5\cdot\sqrt[3]{6}$ D) 13,5 E) 13,75

11. $0 < x < 1$. Mennyi $x^2 - x^3$ maximuma?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{4}{27}$ D) $\frac{1}{6}$ E) Az előzőek közül egyik sem.

12. $x^2y = 12$. Mennyi $3x + 2y$ minimuma?

A) Nincs minimum. B) 0,18 C) $5\sqrt[3]{12}$ D) $5\sqrt[6]{12}$ E) Az előzőek közül egyik sem.

13. $a, b > 0$, $2a + 3b = 12$. Mennyi a^2b maximuma?

A) 18 B) $22\frac{1}{3}$ C) $\frac{64}{3}$ D) 21 E) Az előzőek közül egyik sem.

14. $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 2000$. Mennyi $2a + b + 3c$ minimuma?

A) Nincs minimum. B) 50 C) 60 D) 125 E) Az előzőek közül egyik sem.

15. Az $a, b, c > 0$, $a + b + c = 300$. Mennyi $\frac{a+2b}{bc}+\frac{b+2c}{ac}+\frac{c+2a}{ab}$ minimuma?

A) Nincs minimum. B) 0,01 C) 0,09 D) $\frac{3}{25}$ E) Az előzőek közül egyik sem.

16. Egy deltoid két oldala és szimmetria-átlójának hosszai ebben a sorrendben úgy aránylanak egymáshoz, mint 3:4:5. Mennyi a deltoid beírt és körülírt köre sugarainak aránya?

A) $\frac{12}{35}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{7}$ D) Nem határozható meg egyértelműen.
E) Az előzőek közül egyik sem.

17. Egyenlő szárú háromszög alapja, alaphoz tartozó magassága (cm-ben mérve) és területe mértékszáma (cm^2-ben) ebben a sorrendben egész számokból álló számtani sorozatot alkot. Hányféle egész értéket vehet fel a háromszög magasságának hossza?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Az előzőek közül egyik sem.

18. Az ABC háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak, $c < b < a$, és $19b - 15c = 6a$. Mennyi a sorozat 1-nél nagyobb hányadosának értéke?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) Nem lehet egyértelműen meghatározni.

19. n darab különböző pozitív szám összege 1, a számok reciprokainak összege R ($n \geq 2$). Hány igaz az alábbi állítások közül?
1. R tetszőlegesen nagy lehet. 2. R-nek nincs minimuma. 3. $R > 2n - 1$. 4. $R > n^2$.

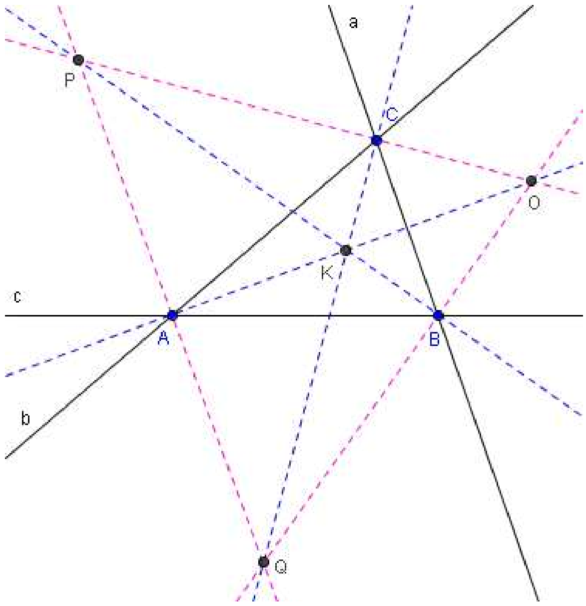
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20. $a, b, c > 0$, $a + b + c = 2016$. Mennyi $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}$ maximuma?

A) Nincs maximum. B) 2016 **C)** 1008 D) $\frac{2016}{6}$ E) Az előzőek közül egyik sem.

Kardos – Montágh-verseny
Megoldások

1. Az *ABC* háromszög hozzáírt köreinek középpontjai *O*, *P*, *Q*, beírt körének középpontja *K*. Melyik állítás igaz az alábbiak közül? *K* az *OPQ* háromszög …



A külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra ($AO \perp PQ$ stb.).
Eredmény: *K* az *OPQ* háromszög magasságpontja.

2. Az *ABC* háromszög hozzáírt köreinek középpontjai *O*, *P*, *Q*. Az *OPQ* háromszög szögei 67°, 58°, 55°. Ekkor az *ABC* háromszög két szöge:

$KOB\angle = KCB\angle = \frac{\gamma}{2}$ (kerületi szögek),
$KOC\angle = \frac{\beta}{2}$, így $COB\angle = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
$\alpha = 2(90° - COB\angle)$.
Eredmény: $\alpha = 46°$, $\beta = 64°$. ($\gamma = 70°$.)

3. Egy háromszög hozzáírt köreinek sugarai 4 cm, 6 cm és 12 cm. Mekkora beírt kör sugara?

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}.$$

Eredmény: $r = 2$ cm.

4. Egy érintőnégyszög három szomszédos oldalának hossza 10 cm, 12 cm és 14 cm, a négyszög területe 96 cm^2. Hány cm hosszú a beírt kör sugara?

A negyedik oldal hossza 10 + 14 – 12 = 12 (cm). Ha az *ABCD* négyszög beírt köre középpontja *O*, akkor az *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* területösszegből

$$T_{ABCD} = \frac{(AB + BC + CD + DA) \cdot r}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2T_{ABCD}}{k} = \frac{192}{48} = 4.$$

Eredmény: 4.

5. Az *ABC* háromszög köré írt körének sugara 12 cm, beírt körének sugara 3 cm. Mekkora a három hozzáírt kör középpontján átmenő kör sugara?

Az *ABC* háromszög az *OPQ* háromszög Feuerbach-köre, így $R(ABC) = \frac{1}{2} R(OPQ)$.

Eredmény: 24 cm.

6. Az *ABCD* érintőnégyszögben $AB > AD$. Az *AC* átlót az *ABC* háromszög beírt köre az *E*, az *ADC* háromszög beírt köre pedig az *F* pontban érinti. Melyik igaz az alábbiak közül? …

Legyen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$. $AE = \frac{a+b+e}{2} - b = \frac{a-b+e}{2}$,

$AF = \frac{d+c+e}{2} - c = \frac{d-c+e}{2}$. *ABCD* érintőnégyszög, ezért $a + c = b + d \Leftrightarrow a - b = d - c$.
Eredmény: $AE = AF$.

7. Melyik igaz a háromszög nevezetes köreire vonatkozó állítások közül?

Tétel: A Feuerbach-kör érinti a háromszög oldalegyeneseit érintő köröket (a beírt kört magába foglalja). A bizonyításhoz elegendő pl. megmutatni, hogy $\overline{FK} = \frac{R}{2} - r$. (*F* a Feuerbach-kör középpontja.) A bizonyítás megtalálható pl. *Reiman István: A geometria határterületei* c. könyvében.
Eredmény: B) A beírt kör érinti a Feurbach-kört.

8. Az A és B városok közötti útszakaszt egy vonat először *x*, másodszor *y*, harmadszor pedig *z* átlagsebességgel tette meg. Melyik válasz helyes az alábbiak közül? …

Az átlagsebesség az összes út és összes idő hányadosa. Ha $AB = s$, akkor
$$\bar{v} = \frac{3s}{\frac{s}{x}+\frac{s}{y}+\frac{s}{z}} = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$
Eredmény: A vonat három útra vonatkoztatott átlagsebessége *x*, *y* és *z* harmonikus közepe.

9. Három pozitív szám mértani sorozatot alkot. A számok mértani közepe 18, számtani közepe 19. Mekkora a négyzetes középük?

Legyen a három szám $\frac{18}{a}$, 18, $18a$ (> 0). $\frac{\frac{18}{a}+18+18a}{3} = 18 \Leftrightarrow 18a^2 - 39a + 18 = 0$.

$a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, a három szám tehát 12, 18, 27. Négyzetes középük $\sqrt{\frac{12^2+18^2+27^2}{3}}$.
Eredmény: $\sqrt{399}$.

10. Három pozitív valós szám közül kettő egyenlő egymással. A számok számtani közepe 14, harmonikus közepe pedig 13,5. Mennyi lehet a számok mértani közepe?

Legyen a három szám *a*, *a*, *b* (> 0).

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2a+b}{3}=14\\[2mm] \dfrac{3}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}=13{,}5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2a+b=42\\ ab=4{,}5(2b+a)\end{array}\right\} \Rightarrow 4a^2-111a+756=0.\ a_1=15{,}75,\ b_1=10{,}5 \text{ vagy}$$

$a_2=12$, $b_2=18$. A számok mértani közepe $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{15{,}75^2\cdot 10{,}5}$ vagy $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{12^2\cdot 18}$.

Eredmény: $6\sqrt[3]{12}$.

11. $0 < x < 1$. Mennyi $x^2 - x^3$ maximuma?

$K = x^2 - x^3 \Leftrightarrow 2K = x^2(2-2x)$

$$\frac{x+x+(2-2x)}{3}\ge\sqrt[3]{x^2(2-2x)} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\ge\sqrt[3]{2K} \Leftrightarrow \frac{4}{27}\ge K.$$

Eredmény: $\dfrac{4}{27}$. (Ha $x=\dfrac{2}{3}$.)

12. $x^2y = 12$. Mennyi $3x + 2y$ minimuma?

Ha $y \to 0$, akkor x tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív szám lehet.
Eredmény: Nincs minimum.

13. $a, b > 0$, $2a + 3b = 12$. Mennyi a^2b maximuma?

$$K = a^2b;\quad \frac{a+a+3b}{3}\ge\sqrt[3]{3a^2b} \Leftrightarrow 4\ge\sqrt[3]{3K} \Leftrightarrow \frac{64}{3}\ge K.$$

Eredmény: $\dfrac{64}{3}$. (Ha $a = 4$, $b=\dfrac{4}{3}$.)

14. $a, b, c > 0$, $ab^2c^3 = 2000$. Mennyi $2a + b + 3c$ minimuma?

$$K = 2a + b + 3c;\quad \frac{2a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c+c+c}{6}\ge\sqrt[6]{\frac{2ab^2c^3}{4}} \Leftrightarrow \frac{K}{6}\ge\sqrt[6]{1000} \Leftrightarrow K\ge 6\cdot\sqrt[3]{10}.$$

Eredmény: $6\cdot\sqrt[3]{10}$. (Ha $a=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2}$, $b=2\cdot\sqrt[3]{10}$, $c=\sqrt[3]{10}$.)

15. Az $a, b, c > 0$, $a + b + c = 300$. Mennyi $\dfrac{a+2b}{bc}+\dfrac{b+2c}{ac}+\dfrac{c+2a}{ab}$ minimuma?

$$K=\frac{a+2b}{bc}+\frac{b+2c}{ac}+\frac{c+2a}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{abc}=\frac{(a+b+c)^2}{abc}=\frac{300^2}{abc}.$$

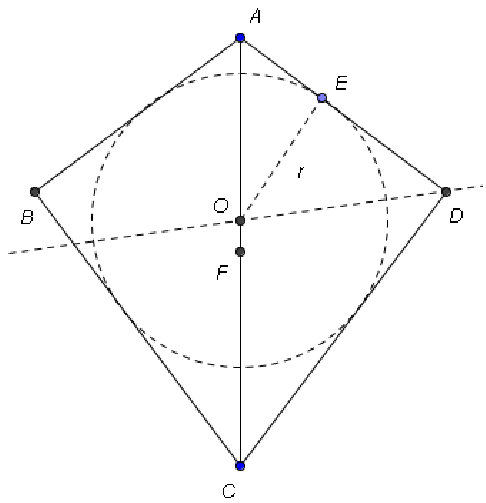
$$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 100\ge\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 10^6\ge abc$$

$$K=\frac{300^2}{abc}\le\frac{300^2}{10^6}=\frac{9}{100}$$

Eredmény: 0,09. (Ha $a = b = c = 100$.)

16. Egy deltoid két oldala és szimmetria-átlójának hosszai ebben a sorrendben úgy aránylanak egymáshoz, mint 3:4:5. Mennyi a deltoid beírt és körülírt köre sugarainak aránya?

Legyen $AB = 3x$, $BC = 4x$, $AC = 5x$ (ábra). A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt ABC derékszögű háromszög, körülírt körének középpontja az AC átló F felezőpontja, sugara $FA = FB = FC = R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2}x$. (Ez egyúttal a deltoid körülírt körének a sugara is.)



Az ABC háromszög területének kétféle felírásából

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot m_b}{2}, \text{ innen}$$

$$m_b = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{3x \cdot 4x}{5x} = 2{,}4x \;\Rightarrow\; BD = 4{,}8x \;\Rightarrow$$

$$T_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{5x \cdot 4{,}8x}{2} = 12x^2 .$$

A deltoid területét felírhatjuk a beírt kör sugara segítségével is (a deltoid területe az ABO, BCO, CDO, DAO háromszögek területének összege):

$$T_{ABCD} = \frac{(AB + BC + CD + DA) \cdot r}{2} = 7xr .$$

Innen $12x^2 = 7xr \;\Rightarrow\; r = \frac{12}{7}x \;\Rightarrow\; \frac{r}{R} = \frac{\frac{12}{7}x}{\frac{5}{2}x} = \frac{24}{35}$.

Eredmény: $\frac{24}{35}$.

17. Egyenlő szárú háromszög alapja, alaphoz tartozó magassága (cm-ben mérve) és területe mértékszáma (cm^2-ben) ebben a sorrendben egész számokból álló számtani sorozatot alkot. Hányféle egész értéket vehet fel a háromszög magasságának hossza?

A feladat eredeti szövegéből sajnos kimaradt az „egész számokból álló” feltétel.
A feltételt felhasználva:

Legyen $a = m - d$, $t = m + d$, $d \in \mathbf{N}$. $t = \frac{am}{2} \;\Leftrightarrow\; m + d = \frac{(m-d)m}{2} \;\Leftrightarrow$

$$m^2 - dm - 2m - 2d = 0 \;\Leftrightarrow\; (d + 4 - m)(m + 2) = 8 .$$

$m = 2$ ($d = 0$, $a = 2$, $t = 2$) vagy $m = 6$ ($d = 3$, $a = 3$, $t = 9$).
Eredmény: m 2-féle értéket vehet fel.

(Az eredeti feladatban: $d \notin \mathbf{N}$ esetén m végtelen sok értéket vehet fel: a $d = \frac{8}{m+2} + m - 4$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.)

18. Az *ABC* háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak, $c < b < a$, és $19b - 15c = 6a$. Mennyi a sorozat 1-nél nagyobb hányadosának értéke?

Ha $q > 1$, akkor $19qc - 15c = 6q^2c$. Innen $q_1 = \frac{3}{2}$ vagy $q_2 = \frac{5}{3}$. De q_2 hamis, nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség: $c + \frac{5}{3}c < \frac{25}{9}c$.

Eredmény: $\frac{3}{2}$.

19. n darab különböző pozitív szám összege 1, a számok reciprokainak összege R ($n \geq 2$). Hány igaz az alábbi állítások közül?
1. R tetszőlegesen nagy lehet. 2. R-nek nincs minimuma. 3. $R > 2n - 1$. 4. $R > n^2$.

$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \iff \frac{1}{n} \geq \frac{n}{R} \iff R \geq n^2$. Egyenlőség csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$ esetben lehetne, de a számok különbözők voltak, így $R > n^2$.

1. Igaz.
2. Igaz.
3. Igaz. $2n - 1 < n^2 \iff 0 < n^2 - 2n + 1 \iff 0 < (n-1)^2$ teljesül, mert $n > 2$. Így $2n - 1 < n^2 < R$.
4. Igaz.

Eredmény: 4.

20. $a, b, c > 0$, $a + b + c = 2016$. Mennyi $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$ maximuma?

Legyen $K = \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4} \Rightarrow$
$K \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{a+c}{4} = \frac{a+b+c}{2} = 1008$.

Eredmény: 1008. (Ha $a = b = c = \frac{2016}{3}$.)