A CSAPATVERSENY FELADATAI

X. KAVICS KUPA

2013. március 11.

1. Mr. X-nek 200 000 szál haja volt, amikor a lakatlan szigetre vetődött, és minden egyes hajszálának hossza éppen $5\,cm$ volt. A hajszálak naponta $0,5\,mm$-et nőttek, de Mr. X nem vágott hajat, mert nem volt hozzá megfelelő eszköze, ráadásul úgyis kihullott minden nap 50 szál haja, melyek sajnálatos módon nem pótlódtak. Hány nap múlva érte el Mr. X fején a hajszálak hosszának összege a maximumát? **(20 pont)**

2. 100 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege megegyezik az őket követő 99 pozitív egész négyzetének összegével. Meghatározandó ezen 199 szám legnagyobbika. **(25 pont)**

3. Egy majdnem szabályos H háromszög szögeinek nagysága $59,99°$, $60°$ és $60,01°$. Legyen H_1 a H talpponti háromszöge, H_2 a H_1 talpponti háromszöge, és így tovább. Melyik a legkisebb n, melyre a H_n háromszög tompaszögű? **(25 pont)**

4. Egy derékszögű háromszög befogói egymást követő egész számok, átfogója pedig 5-nél nagyobb egész szám. Mekkora a háromszög kerületének legkisebb lehetséges értéke? **(25 pont)**

5. Egy gyárban megfigyelték, hogy a munkások óránkénti teljesítménye arányos a napi alvásmennyiségük négyzetével. Hány órát aludjanak a munkások egy nap, hogy maximális legyen a gyár termelése? (A munkások a nap minden pillanatában alszanak vagy dolgoznak.) **(25 pont)**

6. Két szabályos dobókockára matricaként vannak felragasztva a számok 1-től 6-ig. A két kockán lévő 12 számmatricát levesszük, berakjuk egy zsákba, majd egyesével kihúzva őket véletlenszerűen visszaragasztjuk őket a két kocka lapjaira úgy, hogy minden lapra egy szám jusson. Ezután dobunk a két kockával, és a kapott két számot összeadjuk. Mekkora az esély arra, hogy az eredmény 7 lesz? **(30 pont)**

7. Jelöle A az egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder térfogatát. Jelölje B az egységnyi élhosszúságú szabályos oktaéder térfogatát. Határozd meg az A/B arányt. A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(30 pont)**

8. p, q és r olyan prímek, melyekre $5 \le p < q < r$. Mennyi a három prím szorzata, ha tudjuk, hogy $2p^2 - r^2 \ge 49$ és $2q^2 - r^2 \le 193$? **(30 pont)**

9. Határozzuk meg azon x irracionális számok négyzeteinek összegét, melyekre $x^2 + 2x$ és $x^3 - 6x$ is racionális szám. **(30 pont)**

10. Jelölje a $3x^2 + ax + b = 0$ egyenlet gyökeit x_1 és x_2. Az $f(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$ lineáris törtfüggvénynek az x_1, x_2 helyen felvett értékeit jelölje y_1 és y_2. Határozd meg $a^2 + b^2$ értékét, ha y_1 és y_2 kielégíti a $7y^2 - 5y - 11 = 0$ egyenletet. **(35 pont)**

11. Ismert, hogy ha $n \ge k$, akkor az $P_{n,k}(x) = (x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (x^{n-k+1} - 1)$ polinom maradék nélkül osztható az $P_k(x) = (x^k - 1) \cdot (x^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (x - 1)$ polinommal. Jelölje a hányadosként kapott polinomot $Q_{n,k}(x)$. Meghatározandó $Q_{10,5}(1)$ értéke. **(35 pont)**

12. Felveszünk a síkon 1000 általános helyzetű egyenest (semelyik három nem megy át egy ponton és semelyik kettő nem párhuzamos). Az egyenesek tartományokra osztják a síkot. Mennyi a keletkező háromszögek legkisebb lehetséges száma? **(35 pont)**

13. Az $x_0, x_1, \ldots, x_{5000}$ egész számokra teljesül, hogy $x_i^2 = 1 + x_{i-2}x_{i-1}$ ($i = 0, 1, \ldots, 5000$, az indexeket modulo 5001 értve). Mennyi $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{5000}^2$ legnagyobb lehetséges értéke? **(40 pont)**

14. Az $ABCDEFGH$ körbe írható nyolcszögben $AB = BC = CD = DE = 1$ és $EF = FG = GH = HA = 3$. Vegyük azt a négyzetet, melynek beírt köre megegyezik a nyolcszög körülírt körével. Mekkora a négyzet és a nyolcszög területének különbsége? **(40 pont)**

15. Az $ABCD$ tetraéder ABC és ABD lapjai derékszöget zárnak be, és ugyanez teljesül az ACD és BCD lapokra is. Az ABC és ABD lapok területe 10, illetve 11 területegység. A tetraéder lapjainak területe négy különböző egész szám. Mekkora a tetraéder felszíne? **(40 pont)**

16. Legyen N egy négyzet alakú tartomány, és $n \geq 4$ egész szám. A négyzet belsejében lévő X pontot n-edelő pontnak nevezzük, ha a pontból lehet n darab félegyenest indítani úgy, hogy azok n darab egyforma területű háromszögre osszák a négyzetet. Hány olyan pont van a négyzet belsejében, amely 100-adoló, de nem 60-adoló? **(45 pont)**

17. Definiáljuk az a_n sorozatot a következő módon: $a_1 = \sqrt{2}$, továbbá $a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}a_n - 1}{a_n + \sqrt{3}}$. Mennyi a sorozat 10. tagjának 10. hatványa? A válasz a kapott tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összege. **(45 pont)**

18. Jelölje α az $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ egyenlet legnagyobb valós gyökét. Mennyi α^{2014} egészrészének 17-es maradéka? **(45 pont)**

19. Tegyük fel, hogy egy 10 pontú gráf éleit ki lehet színezni két színnel úgy, hogy a gráf ne tartalmazzon egyszínű háromszöget. Legfeljebb hány éle lehet a gráfnak?

(50 pont)

20. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzet belsejében választunk egy P és egy Q pontot. Számítsuk ki a következő kifejezés legkisebb lehetséges értékét.

$$[13(PA + QC) + 14PQ + 15(PB + QD)]^2$$

(50 pont)