

Osztap Bender egy feketetengeri kaszinó krupijával játszik. A játék során a játékosok felváltva következnek (először a krupié, utána Osztap), mindig áttéve néhány zsetont a fekete mezőről a vörösre. Egy lépésben legalább egy, de legfeljebb annyi zsetont lehet áttenni, amennyi a vörösön már van. Az nyer, aki az utolsó zsetont teszi át.

A játék kezdetén a vörös mezőn 10 zseton volt, a feketén pedig egy bizonyos mennyiség (de nem nulla), amelyet Osztap jól megfigyelt. Osztap zsebében még 10 zseton lapul, amelyet a játék megkezdése előtt szeretne észrevétlenül ráejteni a táblára, néhányat a fekete, néhányat a vörös mezőre. Bizonyítsd be, hogy ha ügyesen csinálja, akkor nyerni tud!

Megoldás. Tegyük fel, hogy Osztap a zsetonjait akárhogy is helyezi el, csak veszíthet.

Például ha Osztap az összes zsetonját a fekete mezőre teszi, akkor is van a krupiénak nyerő stratégiája. Ez a nyerő stratégia egy bizonyos lépéssel kezdődik, nevezetesen hogy mondjuk $x \leq 10$ darab zsetont a fekete mezőről a vörösre áthelyez. Ezután akármit is lép Osztap, a krupié nyerni tud.

De akkor ha Osztap a korongokat úgy helyezze el, hogy $10-x$ korongot tesz a fekete mezőre, illetve x darabot a vörösre, akkor a krupié azt a kezdőhelyzetet kapja meg, amelyben $10+x$ darab zseton van a vörös mezőn. Ha Osztap azzal a stratégiával játszik, amivel az imént a krupié játszott, akkor akármit is lép a krupié a $10+x$ vörös mezős zseton esete után, Osztap nyerni tud.

Ellentmondást kaptunk, hiszen Osztap mégis nyerhetett valamely esetben. Ezzel beláttuk, hogy Osztapnak alkalmas zsetonelhelyezés esetén lesz nyerő stratégiája.

Megjegyzések. 1. Ez a meglehetősen szokatlan és egyszerű módszer a stratégialopás néven ismert, és bevett ötlet a játékelméletben.

2. A megoldás során hallgatólagosan használtuk azt, hogy bármely kezdőhelyzethez van valamelyik játékosnak nyerő stratégiája. Ez egyáltalán nem nyilvánvaló, de igaz állítás. A játékelmélet egyik alapvető és mély tétele, hogy ha egy kétszemélyes játéknak mindig van vége, és a végén valamelyik játékos nyerni fog, akkor mindenképpen van az egyik játékosnak nyerő stratégiája. Feladat: bizonyítsuk be ezt a tételt!

3. A feladatot stratégialopás nélkül is megoldhattuk volna, de ez azzal járt volna, hogy megadjuk az összes lehetséges kezdőesethez azt, hogy kinek van nyerő stratégiája. Ha azonban ezt a módszert követjük, akkor belátható, hogy ha Osztap zsebében csak 9 zseton van, akkor nem mindig tud nyerni.