
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
5. osztály
Döntő forduló

Minden állítást indokolni kell.
A feladatok megoldására 60 perced van.
Körzön, vonalzón és íróeszközön kívül egyéb segédeszközt nem használhatsz.

1. feladat: Az osztályba 14 fiú jár. 8 gyereknek van szemüvege, közülük 3 fiú. 13-an járnak matematika szakkörre, a fiúk között 6 matematika szakkörös van, a matematika szakkörösök közt 5 szemüveges van, közöttük 2 fiú. 5 olyan lány van, aki nem szemüveges és matematika szakkörre sem jár.

Hány szemüveges lány jár az osztályba?

Hány lány jár matematika szakkörre?

Hány szemüveges lány jár matematika szakkörre?

Hány lány jár az osztályba?

(6 pont)

2. feladat: Öt láda mindegyikében ugyanannyi alma van. Ha mindegyikládából kiveszünk 60 darabot, akkor az öt ládában összesen annyi alma marad, amennyi eredetileg két ládában volt. Mennyi volt eredetileg a ládákban?

3. feladat: Van 9 darab pálcikánk, ezek hossza 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm és 9 cm. Ezek közül néhány felhasználásával szeretne Ádám négyzetet készíteni. a) Készíts neki egyet, és add meg a négyzet oldalhosszát is. b) Két négyzetet csak akkor tekint Ádám különbözőnek, ha van olyan pálcika, amit az egyikben használt, a másikban nem. Adj meg minél több különböző négyzetet! Hányféle készíthető?

(6 pont)

4. feladat: Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 cm élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 cm élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót?

(6 pont)

5. feladat: A táblázatban helyettesítsd a betűket számokkal úgy, hogy bűvös négyzetet kapj! (A bűvös négyzetben az egy sorban, az egy oszlopban és a két átlóban szereplő négy-négy szám összege megegyezik.)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	-2
2	-3	-4	5
<i>x</i>	<i>c</i>	-1	0
<i>k</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>f</i>

(6 pont)

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
6. osztály
Döntő forduló

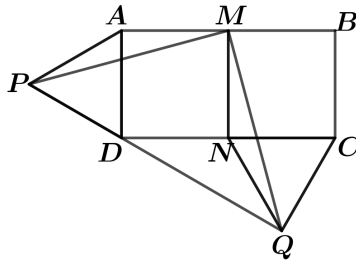
Minden állítást indokolni kell.
A feladatok megoldására 60 perced van.
Körzön, vonalzón és íróeszközön kívül egyéb segédeszközt nem használhatsz.

1. feladat: Behúztuk egy szabályos hatszög összes oldalát és átlóját. Ki tudjuk-e színezni az összes így kapott szakaszt piros, kék és zöld színnel úgy, hogy a szabályos hatszög minden csúcsából 2 piros, 2 kék és 1 zöld szakasz induljon ki?

(6 pont)

2. feladat: Az $ABCD$ téglalapon $AB = 2AD$, M és N pedig az AB , illetve DC felezőpontja. Az AD -re és NC -re mint oldalakra a téglalapon kívül megszerkesztjük az APD és NQC egyenlő oldalú háromszögeket.

- a) Mutasd meg, hogy P , D és Q pontok egy egyenesre esnek!
- b) Mekkora a PQM háromszög P csúcsánál lévő szöge?



(6 pont)

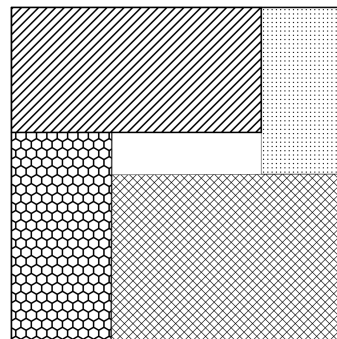
3. feladat: Tüski, a sün és Misu, az egér együtt indultak Tüskitől az erdei bálba, amit Tüski lakásától 120 méterre, a nagy tisztáson tartottak. Misu nagyon kíváncsi volt, ezért folyton előreszaladt a tisztásig, onnan vissza Tüskiig. Ezt könnyen megtehetette, mert háromszor olyan gyorsan haladt, mint Tüski. Hány méterre voltak a tisztástól, amikor harmadszorra érkezett vissza?

(6 pont)

4. feladat: A „Hány óra van?” kérdésre Tóbiás így válaszolt az egyik délelőtt: „Az éjfél óta eltelt idő fele éppen annyi, mint az délig hátralévő idő $\frac{3}{4}$ része.” Mennyi volt az idő, amikor Tóbiás ezt mondta?

(6 pont)

5. feladat: Egy négyzetet felosztottunk 5 darab téglalagra az ábrán látható módon. Tudjuk, hogy a négy mintás téglalap kerületeinek összege 104 cm, területeik összege 134 cm². Mekkora lehet a közepén található, fehér téglalap kerülete, ha tudjuk, hogy oldalai cm-ben mérve egész számok?



(6 pont)

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
7. osztály
Döntő forduló

Minden állításodat indokolni kell.
A feladatok megoldására 90 perced van.
Körzön, vonalzón és íróeszközön kívül egyéb segédeszközt nem használhatsz.

1. feladat: Az A és B városok távolsága az országúton haladva 430 km. Reggel 8 órakor A -ból elindul B felé egy autó 60 km/h sebességgel, egy órával később pedig B -ből A felé egy motoros 40 km/h sebességgel. (Úgy tekintjük, hogy a járművek egyenletes sebességgel mozognak.) A járművek előbb közelednek, majd elhaladnak egymás mellett. Hány óra hány perckor lesz a két jármű egymástól 20 km-re?

(7 pont)

2. feladat: Anna és Béla egy táblára felírják az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat, majd felváltva letörölnek egy-egy számot addig, amíg a táblán csak két szám marad. Anna nyer, ha a két szám összege páratlan, egyébként Béla nyer. Anna kezd. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

(7 pont)

3. feladat: Az ABC szabályos háromszög BC oldalához illesztettük a BCD egyenlőszárú háromszöget, így az $ABDC$ négyszöget kaptuk. A BCD háromszög egyik szöge 33 fokkal nagyobb egy másik szögénél. Mekkora lehet az $ABDC$ négyszög B csúcsánál lévő szöge?

(10 pont)

4. feladat: Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? (Ne felejts el indokolni!)

a) Minden lehetséges módon sorba állítunk 3 angol, 4 francia és 5 német diákot. Jelentse A azon sorrendek számát, amelyekben az angolok elöl állnak, és F azon sorrendek számát, amelyekben a franciák hátul állnak.

Állítás: $A = F$.

b) Két különböző pozitív szám átlaga 10. Állítás: a számok szorzata mindig kisebb, mint 100.

(4+4 pont)

5. feladat: Melyek azok az A és B pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy a két szám legkisebb közös többszöröse 34-gyel nagyobb, mint a két szám legnagyobb közös osztója?

(12 pont)

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
8. osztály
Döntő forduló

Minden állításodat indokolni kell.
A feladatok megoldására 90 perced van.
Körzön, vonalzón és íróeszközön kívül egyéb segédeszközt nem használhatsz.

1. feladat: Simon külön módon másképp számolja az időt, mint az osztálytársai. Az S.I. mértékegységek alapján bevezette a decinap, centinap és a millinap fogalmát, amelyek rendre a nap tized, század és ezredrészt jelölik. Simonnak pontosan 25 millinap kell ahhoz, hogy beérjen az iskolába, Normannak pedig 36 perc szükséges ehhez. Melyiküknek kell több idő, hogy beérjen az iskolába?

(4 pont)

2. feladat: Elhelyezhetőek-e a szabályos nyolcszög csúcsaiba az $1, 2, \dots, 8$ számok úgy, hogy bármely három szomszédos csúcsban lévő szám összege 13-nál nagyobb legyen? *Minden csúcsba pontosan egy szám kerülhet.*

(6 pont)

3. feladat: Az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolóponja D , a B -hez közelebbi pedig E . A BC oldal felezőpontja F , az EF felezőpontja G . Mutassuk meg, hogy az $ADGC$ négyszög területe kétszer akkora, mint a $DBCG$ négyszög területe.

(6 pont)

4. feladat: A $2, 3, 4, 6$ számok közül minden lehetséges módon kiválasztunk néhányat (lehet, hogy csak egyet, lehet, hogy az összeset) és összeszorozzuk azokat. Az így kapott szorzatokat is összeszorozzuk. Milyen számjegyre fog végződni az így kapott szám?

(6 pont)

5. feladat: Az első n pozitív egész számot kiszíneztük pirosra vagy kékre. A színezést úgy végeztük el, hogy a számok között nincs három egyszínű, amelyek összege osztható lenne hárommal. Mennyi lehet az n legnagyobb értéke?

(8 pont)

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
5. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontoszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Az osztályba 14 fiú jár. 8 gyereknek van szemüvege, közülük 3 fiú. 13-an járnak matematika szakkörre, a fiúk között 6 matematika szakkörös van, a matematika szakkörösök közt 5 szemüveges van, közöttük 2 fiú. 5 olyan lány van, aki nem szemüveges és matematika szakkörre sem jár.

Hány szemüveges lány jár az osztályba?

Hány lány jár matematika szakkörre?

Hány szemüveges lány jár matematika szakkörre?

Hány lány jár az osztályba?

(6 pont)

1. feladat megoldás: A nyolc szemüveges gyerekből három fiú, azaz 5 szemüveges lány jár az osztályba.

(1 pont)

A 13 matematikaszakkörös között 6 fiú van, tehát 7 lány jár matematika szakkörre.

(1 pont)

A matematika szakkörösök között az 5 szemüvegesből 2 fiú, azaz 3 szemüveges lány jár matematika szakkörre.

(1 pont)

$5 + 7 - 3 = 9$ lány van, aki szemüveges vagy matematika szakkörre jár.

(2 pont)

Így az osztályba $9 + 5 = 14$ lány jár.

(1 pont)

2. feladat: Öt láda mindegyikében ugyanannyi alma van. Ha mindegyikládából kiveszünk 60 darabot, akkor az öt ládában összesen annyi alma marad, amennyi eredetileg két ládában volt. Mennyi volt eredetileg a ládákban?

(6 pont)

2. feladat megoldás: Az öt ládából összesen 300 darab almát veszünk ki.

(2 pont)

Ez a 300 darab eredetileg 3 láda almának felel meg.

(3 pont)

Tehát eredetileg egy ládában 100 darab alma volt.

(1 pont)

3. feladat: Van 9 darab pálcikánk, ezek hossza 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm és 9 cm. Ezek közül néhány felhasználásával szeretne Ádám négyzetet készíteni. a) Készíts neki egyet, és add meg a négyzeted oldalhosszát is. b) Két négyzetet csak akkor tekint Ádám különbözőnek, ha van olyan pálcika, amit az egyikben használt, a másikban nem. Adj meg minél több különböző négyzetet! Hányféle készíthető?

(6 pont)

3. feladat megoldás: A megadott pálcikákból 6 cm oldalú négyzetet nem tudunk kirakni. $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + ?$

7 cm oldalú kirakható: $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$

(1 pont)

8 cm oldalú: $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$

(1 pont)

9 cm oldalú: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6$

$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$

$9 = 1 + 8 = 3 + 6 = 4 + 5$

$9 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

(2 pont)

$1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

10 *cm*-es oldalú: $9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$

11 *cm*-es oldalú: $9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$

Hosszabb oldalú már nem rakható ki, így 9 különböző kirakás van.

(1 pont)

(1 pont)

4. feladat: Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 *cm* élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 *cm* élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót?

(6 pont)

4. feladat megoldás: Egy fehér kockából a felületen 3 cm^2 -nyit látunk, ha a csúcsban van, 2 cm^2 -nyit látunk, ha élközépen van, 1 cm^2 -nyit látunk, ha lapközépen van, illetve 0 cm^2 -nyit látunk, ha a nagy kocka belsejében van.

(2 pont)

A 4 fehér kockából a felületen maximum $4 * 3 = 12$ cm^2 -nyi fehér lehet, ha a fehéreket a kocka csúcsaiba helyezzük el.

(1 pont)

Minimálisan 3 cm^2 -nyi, ha az egyik fehér a kocka közepén belül van, a maradék hármat pedig lapközépre helyezzük.

(1 pont)

A köztes értékek mindegyike elérhető, így összesen 10 különböző lehetőség van, azaz május 10-én készítette az utolsót.

(2 pont)

5. feladat: A táblázatban helyettesítsd a betűket számokkal úgy, hogy bővös négyzetet kapj! (A bővös négyzetben az egy sorban, az egy oszlopban és a két átlóban szereplő négy-négy szám összege megegyezik.)

a	b	x	-2
2	-3	-4	5
x	c	-1	0
k	x	e	f

(6 pont)

5. feladat megoldás: A második sor teljes, így a bővös összeg: $2 + (-3) + (-4) + 5 = 0$.

(1 pont)

A negyedik oszlopban csak az f hiányzik, így $f = -3$.

(1 pont)

Ezután $a = 7$.

(1 pont)

Ha az első oszlopot nézzük, akkor $x + k = -9$, így a negyedik sorban is,

tehát $e + f = 9$, vagyis $e = 12$.

(2 pont)

A harmadik oszlopból így $x = -7$, $k = -2$, végül $c = 8$, $b = 2$.

(1 pont)

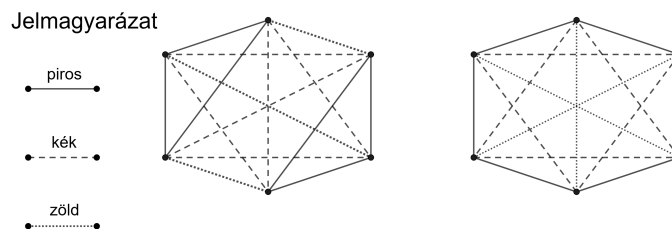
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
6. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Behúztuk egy szabályos hatszög összes oldalát és átlóját. Ki tudjuk-e színezni az összes így kapott szakaszt piros, kék és zöld színnel úgy, hogy a szabályos hatszög minden csúcsából 2 piros, 2 kék és 1 zöld szakasz induljon ki?

(6 pont)

1. feladat megoldás: Példa két helyes konstrukcióra:



Ha a tanuló megadott egy, a feltételeknek megfelelő helyes konstrukciót, akkor kapja meg a maximális 6 pontot.

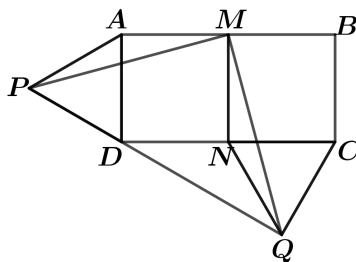
Ha a tanuló megad egy olyan konstrukciót, amelyben csak az egyik színre vonatkozó feltétel teljesül (vagy minden csúcsból 2 piros, vagy minden csúcsból 2 kék, vagy minden csúcsból 1 zöld szakasz indul ki), de a másik két színre vonatkozó feltétel nem teljesül, akkor 2 pontot kapjon.

Ha a színekre vonatkozó feltételek közül a tanuló konstrukciójában 2 színre vonatkozó feltétel is helyes, akkor szükségképpen a harmadik színre vonatkozó feltétel is helyes, de a ha a tanuló a harmadik színnel színezendő szakaszokat nem, vagy csak hiányosan húzta be a konstrukciójában, akkor összesen 4 pontot kapjon.

(6 pont)

2. feladat: Az $ABCD$ téglalapban $AB = 2AD$, M és N pedig az AB , illetve DC felezőpontja. Az AD -re és NC -re mint oldalakra a téglalapon kívül megszerkesztjük az APD és NQC egyenlő oldalú háromszögeket.

- a) Mutasd meg, hogy P , D és Q pontok egy egyenesre esnek!
- b) Mekkora a PQM háromszög P csúcsánál lévő szöge?



(6 pont)

2. feladat megoldás: a) A DNQ háromszög N csúcsánál levő szöge $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ -os. (1 pont)

A DNQ háromszög egyenlő szárú háromszög, mert $DN = NQ$, ezért a D és Q csúcsánál levő szögei $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ -osak.

(1 pont)

P, D, Q pontok azért esnek egy egyenesbe, mert a PAD háromszög D -nél levő szöge 60° , az $ADNM$ négyszög négyzet, ezért D -nél levő szöge 90° , és DNQ háromszög D -nél levő szöge 30° , $60^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.

(1 pont)

b) A PAM háromszög A csúcsánál levő szöge $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ -os.

(1 pont)

A PAM háromszög egyenlő szárú, mert $PA = AM$, ezért az M és P csúcsánál levő szögei $(180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$ -osak.

(1 pont)

MPQ háromszög P -nél levő szöge $60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

(1 pont)

3. feladat: Tüski, a sün és Misu, az egér együtt indultak Tüskitől az erdei bálba, amit Tüski lakásától 120 méterre, a nagy tisztáson tartottak. Misu nagyon kíváncsi volt, ezért folyton előreszaladt a tisztásig, onnan vissza Tüskiig. Ezt könnyen megtehetette, mert háromszor olyan gyorsan haladt, mint Tüski. Hány méterre voltak a tisztástól, amikor harmadszorra érkezett vissza? (6 pont)

3. feladat megoldás: Mivel Misu háromszor olyan gyorsan szaladt, mint Tüski, ezért ugyanannyi idő alatt háromszor akkora távot tesz meg. Amikor ő először elért a 120 méterre levő tisztásig, akkor Tüski még csak 40 métert tett meg. (1 pont)

A Tüski és Misu között ekkor levő 80 métert 1:3 arányban kell felosztani, ezért Tüski 20 métert, Misu 60 métert tesz meg az első találkozási pontig, ami tehát 60 méterre van a tisztástól. (1 pont)

Ezután Misu újra a tisztásig szalad előre, ezalatt Tüski 20 métert tesz meg. (1 pont)

A Tüski és Misu között ekkor levő távolságot, ami 40 méter, megint 1:3 arányban osztjuk fel, Tüski 10 métert, Misu 30 métert halad, tehát a második találkozási pont 30 méterre van a tisztástól. (1 pont)

Ezt követően, míg Misu újra elmegy a tisztásig, 30 métert kell megtennie; ezalatt Tüski 10 métert halad. (1 pont)

Az ekkor köztük levő 20 métert megint 1:3 arányban osztjuk fel, így Tüski 5 métert, Misu pedig 15 métert tesz meg, tehát a harmadik találkozási pont 15 méterre lesz a tisztástól. (1 pont)

3. feladat második megoldás: Mivel Misu háromszor olyan gyorsan szaladt, mint Tüski, ezért ugyanannyi idő alatt háromszor akkora távot tesz meg. Legyen kezdetben $2x$ a távolsága a két állatnak a tisztástól. Ekkor az első találkozási pont x távolságra volt a tisztástól, mert addig Misu $3x$, Tüski pedig x távolságot haladt. (2 pont)

Tehát az első találkozási pont feleakkora távolságra van a tisztástól, mint a kiindulási pont, és minden újabb találkozási pont feleakkora távolságra lesz a tisztástól, mint az előző találkozási pont. (1 pont)

Tehát kezdetben 120 méter volt a távolság, az 1. találkozási pont 60 méterre, (1 pont)

a 2. találkozási pont 30 méterre, (1 pont)

a 3. találkozási pont pedig 15 méterre van a tisztástól. (1 pont)

4. feladat: A „Hány óra van?” kérdésre Tóbiás így válaszolt az egyik délelőtt: „Az éjfél óta eltelt idő fele éppen annyi, mint az délig hátralevő idő $\frac{3}{4}$ része.” Mennyi volt az idő, amikor Tóbiás ezt mondta?

4. feladat megoldás: Legyen az éjfél óta eltelt idő fele 3 időegység. (1 pont)

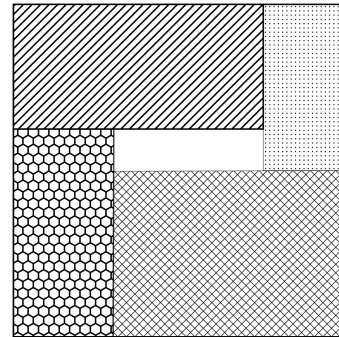
Ekkor a délig hátralevő idő $\frac{3}{4}$ része is 3 időegység, $\frac{1}{4}$ része pedig 1 egység. Összesen a délig hátralevő idő 4 egység. (1 pont)

Az éjfél óta eltelt idő $2 \cdot 3 = 6$ egység. (1 pont)

Tehát az éjfél és a déli 12 óra között levő 12 óra összesen $6 + 4 = 10$ időegység. (1 pont)

Ezért 1 egység 12 óra $\frac{1}{10}$ részének felel meg, vagyis 1,2 órának, ami 1 óra és 12 perc. (1 pont)

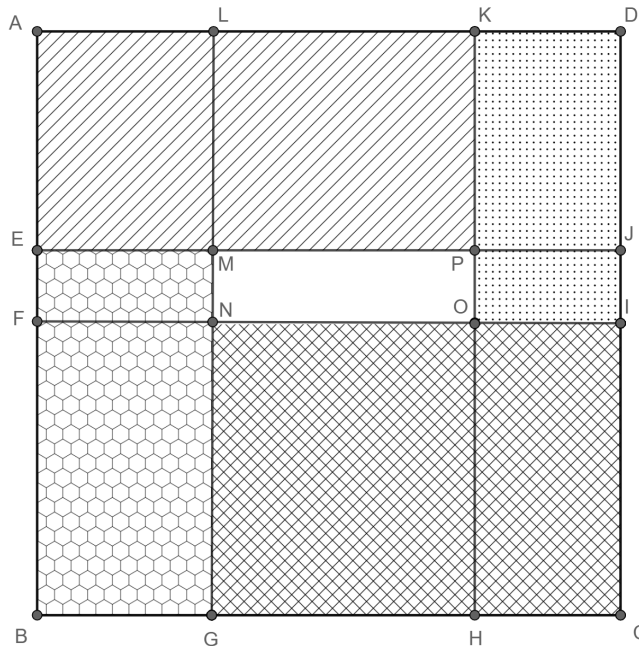
A jelenlegi időt úgy kapjuk, ha vesszük az 1 óra 12 perc hatszorosát, ez utóbbi 7 óra és 12 perc. Tehát a jelenlegi idő 7 óra 12 perc. (1 pont)



5. feladat: Egy négyzetet felosztottunk 5 darab téglalagra az ábrán látható módon. Tudjuk, hogy a négy mintás téglalap kerületeinek összege 104 cm, területeik összege 134 cm^2 . Mekkora lehet a közepén található, fehér téglalap kerülete, ha tudjuk, hogy oldalai cm -ben mérve egész számok?

(6 pont)

5. feladat megoldás: Hosszabbítsuk meg a téglalapok oldalait az ábrán látható módon és használjuk az ábra jelöléseit. $ABCD$ négyzet, tehát $AB = AD$.



Tekintsük először a téglalapok vízszintes oldalait.

Mivel: $AK + KD = AD$ és $EP + HC = EP + PJ = AD$, valamint $EM + NI = EM + MJ = AD$ és $BG + GC = BC = AD$, ezért a téglalap vízszintes oldalainak összege $4 \cdot AD$, vagyis éppen a négyzet kerülete. (1 pont)

Tekintsük a téglalapok függőleges oldalait. Hasonlóan megkapható, hogy a téglalapok függőleges oldalainak összege is $4 \cdot AB$, vagyis a négyzet kerülete (mivel $AE + EB = AB$, $KP + MG = LM + MG = AB$, $KO + NG = KO + OH = AB$ és $DI + IC = DC = AB$). (1 pont)

Tehát az $ABCD$ négyzet kerületének a kétszerese a mintás téglalapok kerületének összege, vagyis 104 cm, tehát a négyzet kerülete $104 : 2 = 52$ cm, a négyzet egy oldala pedig $52 : 4 = 13$ cm. (1 pont)

A négyzet területe így $13 \cdot 13 = 169$ cm², az $MNOP$ téglalap területe pedig $169 - 134 = 35$ cm².

(1 pont)

Ez csak úgy lehet, ha a téglalap oldalai: 1 cm és 35 cm, vagy pedig 5 cm és 7 cm. De az előbbi eset nem lehetséges, mert a négyzet oldala 13 cm, ami kisebb, mint 35 cm. (1 pont)

Tehát a középső, fehér téglalap kerülete $2 \cdot (5 + 7) = 24$ cm.

(1 pont)

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
7. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontoszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Az A és B városok távolsága az országúton haladva 430 km. Reggel 8 órakor A -ból elindul B felé egy autó 60 km/h sebességgel, egy órával később pedig B -ből A felé egy motoros 40 km/h sebességgel. (Úgy tekintjük, hogy a járművek egyenletes sebességgel mozognak.) A járművek előbb közelednek, majd elhaladnak egymás mellett. Hány óra hány perckor lesz a két jármű egymástól 20 km-re?

(7 pont)

1. feladat első megoldás: 8 óra után t órával az autós $60t$, a motoros $40(t - 1)$ km-t tett meg ($t > 1$).
(1 pont)

I. eset: Ha még nem találkoztak, akkor $60t + 40(t - 1) = 430 - 20$. *(1 pont)*

Az egyenlet megoldása $t = 4, 5$, *(1 pont)*

tehát 12 óra 30 perckor lesznek egymástól 20 km-re. *(1 pont)*

II. eset: Ha már elhaladtak egymás mellett, akkor $60t + 40(t - 1) = 430 + 20$. *(1 pont)*

Az egyenlet megoldása $t = 4, 9$, *(1 pont)*

tehát 12 óra 54 perckor lesznek egymástól ismét 20 km-re. *(1 pont)*

1. feladat második megoldás: A járművek között lévő távolság az első óra végéig (9 óráig) 60 km-rel csökken, vagyis ekkor 370 km. *(1 pont)*

Ezután a távolságuk óránként 100 km-rel csökken. *(1 pont)*

Ahhoz, hogy 20 km-re csökkenjen, $\frac{370-20}{100} = 3,5$ óra kell még 9 óra után, *(1 pont)*

vagyis 12 óra 30 perckor lesznek egymástól 20 km-re. *(1 pont)*

A találkozásuk után ismét 20 km lesz a távolság, ha további $2 \cdot 20 = 40$ km-t tesznek meg. *(1 pont)*

Az ehhez szükséges idő $\frac{40}{100} = 0,4$ óra = 24 perc, *(1 pont)*

vagyis 12 óra 54 perckor lesznek egymástól ismét 20 km-re. *(1 pont)*

2. feladat: Anna és Béla egy táblára felírják az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat, majd felváltva letörölnek egy-egy számot addig, amíg a táblán csak két szám marad. Anna nyer, ha a két szám összege páratlan, egyébként Béla nyer. Anna kezd. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

(7 pont)

2. feladat megoldás: Anna tud nyerni, egy nyerő stratégiája például a következő:

Kezdekor letöröl egy páratlan számot (ekkor 4 páros és 4 páratlan szám maradt a táblán). Ezután minden lépésével a Béla által letörölt számmal ellentétes paritású számot töröl le, így a táblán 3-3, majd 2-2, végül 1-1, különböző paritású szám marad. Egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, így Anna nyer. *(7 pont)*

Megjegyzések:

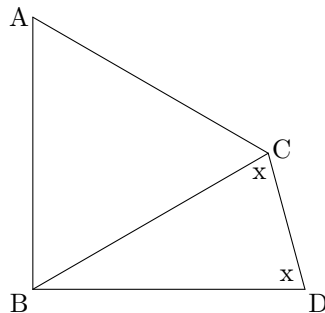
Bármilyen más nyerő stratégia is teljes értékű megoldás. Néhány példa:

- a) (párosítás) Anna letörli a 9-et, majd a maradék 8 számot 4 darab, 9 összegű párra osztja. Ha Béla letörli az x -et, akkor Anna a $(9 - x)$ törlésével válaszol, így a végállapotban 9 a két maradék szám összege.
- b) (szimmetria) Anna első lépésével előállítja a $(4, 4)$ páros-páratlan szimmetriát (azaz a 4 páros, 4 páratlan helyzetet), majd Béla lépései után ezt a szimmetrikus helyzetet megőrzi. Az $(1, 1)$ végállapotban Anna nyer.
- c) (visszafelé okoskodás) A végállapotban az $(1, 1)$ előállítása Annának nyerő helyzet; előtte $(2, 1)$ és $(1, 2)$ vesztes, $(2, 2)$ előállítása nyerő; majd hasonlóan $(3, 3)$ és $(4, 4)$ előállítása is nyer.
2. A nyerő stratégia hiányában is adható legfeljebb 4 részpont például a következő észrevételekért:
- Anna nyer, ha a végállapotban különböző paritású számok maradnak; (1 pont)
 - a játékban nem a számok konkrét értéke számít, hanem csak a számok paritása; (1 pont)
 - a lehetséges szimmetrikus helyzet észrevétele; (1 pont)
 - illetve a visszafelé okoskodással kapott nyerő helyzetek közül egy-kettő megtalálása. (1-2 pont)
3. Általánosítás: páratlan darab kezdőszám esetén Anna akkor tud nyerni, ha a páros és páratlan kezdőszámok darabszámának 1 az eltérése. (Ha az eltérés ennél nagyobb, akkor Béla nyer, mert le tudja törölni a kisebb darabszámú csoportot.)

3. feladat: Az ABC szabályos háromszög BC oldalához illesztettük a BCD egyenlőszárú háromszöget, így az $ABDC$ négyszöget kaptuk. A BCD háromszög egyik szöge 33 fokkal nagyobb egy másik szögénél. Mekkora lehet az $ABDC$ négyszög B csúcsánál lévő szöge?

(10 pont)

3. feladat megoldás:



Egy jó ábra a lehetőségek közül (pl.). (1 pont)

Az ABC szabályos háromszög minden szöge 60° -os. (1 pont)

Először a BCD háromszög szögeit határozzuk meg. Jelölje x az alapon fekvő szögeket (fokokban mérve).

I. eset: Ha a szárak által bezárt szög a nagyobb, akkor a háromszög szögei $x + 33^\circ, x, x$. Innen $3x + 33^\circ = 180^\circ, x = 49^\circ$, a háromszög szögei $49^\circ, 49^\circ, 82^\circ$. (2 pont)

II. eset: Ha a szárak által bezárt szög a kisebb, akkor a háromszög szögei $x - 33^\circ, x, x$. Innen $3x - 33^\circ = 180^\circ, x = 71^\circ$, a háromszög szögei $71^\circ, 71^\circ, 38^\circ$. (2 pont)

Az ABD szög a 60° -nál a BCD háromszög alapon fekvő, vagy szárak által bezárt szögével nagyobb. Az ABD szög tehát a négyféle értéket vehet fel: $60^\circ + 49^\circ = 109^\circ$, $60^\circ + 82^\circ = 142^\circ$, $60^\circ + 71^\circ = 131^\circ$, $60^\circ + 38^\circ = 98^\circ$. (4 pont)

(Ellenőrzés: Nem kapnánk megoldást, ha a négyszögben $ACD \sphericalangle = 180^\circ$ lenne, vagyis ha a BCD háromszög egyik szöge 120° -os lenne. Ez az eset azonban nem áll fenn, mind a négy megoldás megfelelő.)

4. feladat: Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? (Ne felejts el indokolni!)

a) Minden lehetséges módon sorba állítunk 3 angol, 4 francia és 5 német diákot. Jelentse A azon sorrendek számát, amelyekben az angolok elöl állnak, és F azon sorrendek számát, amelyekben a franciák hátul állnak.

Állítás: $A = F$.

b) Két különböző pozitív szám átlaga 10. Állítás: a számok szorzata mindig kisebb, mint 100.

(4+4 pont)

4. feladat megoldás:

a) Az állítás hamis. (1 pont)

$A = 3! \cdot 9!$, mert először sorba állítjuk az angolokat, mögöttük pedig a többi 9 diákot. $F = 4! \cdot 8!$, mert először sorba állítjuk a franciákat, majd elöttük a többi 8 diákot. (2 pont)

$3! \cdot 9! \neq 4! \cdot 8!$, mert például $3! \cdot 8! \cdot 9 > 3! \cdot 4 \cdot 8!$. (Azaz $A > F$.) (1 pont)

b) Az állítás igaz. (1 pont)

Legyen a két szám $10 + x$ és $10 - x$. Ekkor szorzatuk $(10 + x)(10 - x) = 100 - x^2$, (2 pont)

ami mindig kisebb 100-nál ($x > 0$ miatt). (1 pont)

Megjegyzés: 1. A b) feladatra többféle megoldás adható, a hiányos megoldásokat arányosan pontozzuk.

2. Előfordulhat, hogy egy tanuló a b) feladat indoklásában arra hivatkozik, hogy „ha két pozitív szám összege 20, szorzatuk akkor a legkisebb, ha a számok egyenlők”. Ekkor az indoklás 3 pontjából 1 pont adható.

5. feladat: Melyek azok az A és B pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy a két szám legkisebb közös többszöröse 34-gyel nagyobb, mint a két szám legnagyobb közös osztója?

(12 pont)

5. feladat megoldás: A két szám legnagyobb közös osztóját jelölje d , ekkor $A = da$, $B = db$ alakban írható (ahol a és b már relatív prímek), a legkisebb közös többszörös pedig dab . (2 pont)

A $dab = 34 + d$ egyenletből következik, hogy d osztója 34-nek. (2 pont)

($dab = 34 + d \Rightarrow dab - d = 34 \Rightarrow d(ab - 1) = 34$, és d osztója 34-nek.)

(Feltehető, hogy $A < B$, azaz $a < b$.)

I. eset: $d = 1$. Ekkor $ab = 35$, $(a, b) = (1, 35)$ vagy $(5, 7)$, és ezek A és B értékei is (lásd alul a táblázatot).

(2 pont)

II. eset: $d = 2$. Ekkor $ab = 18$, $(a, b) = (1, 18)$ vagy $(2, 9)$, és $(A, B) = (2, 36)$ vagy $(4, 18)$.

(2 pont)

III. eset: $d = 17$. Ekkor $ab = 3$, $(a, b) = (1, 3)$, és $(A, B) = (17, 51)$.

(2 pont)

IV. eset: $d = 34$. Ekkor $ab = 2$, $(a, b) = (1, 2)$, és $(A, B) = (34, 68)$.

(2 pont)

	a	b	A	B
$d = 1$	1	35	1	35
	5	7	5	7
$d = 2$	1	18	2	36
	2	9	4	18
$d = 17$	1	3	17	51
$d = 34$	1	2	34	68

Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
8. osztály
Döntő forduló
MEGOLDÁSOK

A feladatokra általában többféle megoldás adható,
az útmutatóban közölt megoldást és pontozást iránymutatónak szánjuk.
A részpontszámok minden esetben bonthatók,
a részletes pontozás a javító tanár szakmai döntésének eredménye.

1. feladat: Simon külön módon másképp számolja az időt, mint az osztálytársai. Az S.I. mértékegységek alapján bevezette a decinap, centinap és a millinap fogalmát, amelyek rendre a nap tized, század és ezredrészét jelölik. Simonnak pontosan 25 millinap kell ahhoz, hogy beérjen az iskolába, Normannak pedig 36 perc szükséges ehhez. Melyiküknek kell több idő, hogy beérjen az iskolába?

(4 pont)

1. feladat első megoldás: Egy nap $24 \cdot 60 = 1440$ percből áll.

(1 pont)

Tehát 1 millinap 1,44 percet jelöl.

(1 pont)

Innen 25 millinap $25 \cdot 1,44 = 36$ percet jelöl.

(1 pont)

Vagyis a két fiúnak ugyanannyi időre van szükségük, hogy beérjenek.

(1 pont)

1. feladat második megoldás: (ha órában számolunk):

25 millinap = $25 \cdot 24/1000 = 0,6$ óra, azaz 36 perc.

(4 pont)

2. feladat: Elhelyezhetőek-e a szabályos nyolcszög csúcsaiba az $1, 2, \dots, 8$ számok úgy, hogy bármely három szomszédos csúcsban lévő szám összege 13-nál nagyobb legyen? Minden csúcsba pontosan egy szám kerülhet.

(6 pont)

2. feladat első megoldás: Figyeljük az $1, 2, 3$ számokat. Ezek közül semelyik kettő nem kerülhet egy hármashba, mert akkor az összeg nem lenne nagyobb, mint 13.

(3 pont)

Vagyis ezen három szám közül bármely kettő közé még kell kerülnie 2 nagy számnak.

(2 pont)

Ez viszont nem lehetséges, mert akkor legalább $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ szám-ra volna szükségünk.

(1 pont)

2. feladat második megoldás: Tegyük fel, hogy létezik ilyen elhelyezés, és jelölje a_i a csúcsokba írt számokat, S pedig a számok összegét.

(1 pont)

Ekkor $a_1 + a_2 + a_3 \geq 14$, $a_2 + a_3 + a_4 \geq 14$, \dots , $a_8 + a_1 + a_2 \geq 14$.

(1 pont)

Összeadva az egyenlőtlenségeket, $3 \cdot S \geq 8 \cdot 14 = 112$ adódna (minden számot három összegben számoltunk).

(2 pont)

De a számok összege $S = 1 + 2 + \dots + 8 = 36$, amiből $3 \cdot S = 108$, így a $3 \cdot S$ -nek egyszerre kell 112-nél nagyobbnak és 108-nak lennie, ami ellentmondás.

(2 pont)

3. feladat: Az ABC háromszög AB oldalának A -hoz közelebbi harmadolóponja D , a B -hez közelebbi pedig E . A BC oldal felezőpontja F , az EF felezőpontja G . Mutassuk meg, hogy az $ADGC$ négyszög területe kétszer akkora, mint a $DBCG$ négyszög területe.

(6 pont)

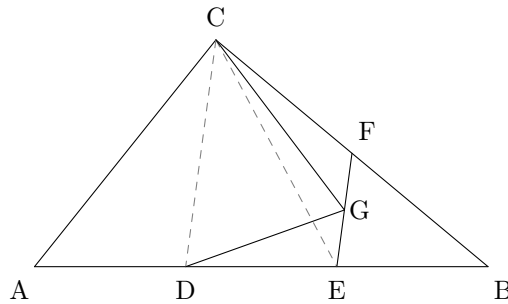
3. feladat első megoldás: Húzzuk be az CD és CE segédvonalakat. (1 pont)

Mivel az EF középvonal a DBC háromszögben, ezért EF párhuzamos CD -vel. (1 pont)

Így a CDE háromszög területe megegyezik a CDG háromszög területével, hiszen azonos a CD alapjuk és megegyezik a magasságuk. (2 pont)

Tehát az $ADGC$ négyszög területe megegyezik az AEC háromszög területével, hasonlóan a DBC konkáv négyszög területe pedig az EBC háromszög területével. (1 pont)

Mivel a két háromszög magassága megegyezik, alapjaik aránya pedig $2 : 1$, így a területeik aránya is ugyanennyi. (1 pont)



3. feladat második megoldás: Jelölje T az ABC háromszög területét. A részháromszögek alapjai és magasságai segítségével megmutatható, hogy $T_{EBF} = \frac{T}{6}$, $T_{DEG} = T_{GFC} = \frac{T}{12}$, (3 pont)

így $T_{DBCG} = \frac{T}{6} + \frac{T}{12} + \frac{T}{12} = \frac{T}{3}$. (2 pont)

A maradék terület pedig pont $T - \frac{T}{3} = 2 \cdot \frac{T}{3}$, amivel igazoltuk az állítást. (1 pont)

4. feladat: A 2, 3, 4, 6 számok közül minden lehetséges módon kiválasztunk néhányat (lehet, hogy csak egyet, lehet, hogy az összeset) és összeszorozzuk azokat. Az így kapott szorzatokat is összeszorozzuk. Milyen számjegyre fog végződni az így kapott szám? (6 pont)

4. feladat megoldás: Ebből a 4 számból 15 féleképpen tudunk kiválasztani valahányat. Ezt lehet úgy, hogy leírja az eseteket, vagy úgy, hány darabot választ ki a négyből, esetleg úgy, hogy egy számot vagy beleválaszt, vagy nem és ez $2^4 - 1 = 15$ eset, hiszen azt nem számoljuk, amikor egyiket sem választjuk bele. Ha ez az érték jó, akkor kapja meg a 2 pontot. (2 pont)

Tegyük a 15 közé még az 1 számot is, (ez felel meg az üres halmaznak). Így minden esetnek lesz egy (komplementer) párja, amivel a szorzatuk pontosan $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ lesz, viszont a szorzaton nem változtat. Például a $2 \cdot 4$ -nek a párja a $3 \cdot 6$ lesz, a 3-nak a párja a $2 \cdot 4 \cdot 6$ lesz, stb. (1 pont)

Így keletkezik nyolc pár, ahol a párok szorzata mind 144. (1 pont)

Keressük a 144^8 -nak az utolsó számjegyét. Elég a hatványozásnál az utolsó jegyet vizsálni, hogy hogyan változik. A négy páratlan hatványai 4-re, páros hatványai pedig 6-ra fognak végződni, így az utolsó számjegy a 6 lesz. (2 pont)

5. feladat: Az első n pozitív egész számot kiszíneztük pirosra vagy kékre. A színezést úgy végeztük el, hogy a számok között nincs három egyszínű, amelyek össze osztható lenne hárommal. Mennyi lehet az n legnagyobb értéke? (8 pont)

5. feladat megoldás: Ha $n = 7$, akkor még létezik ilyen színezés.

Pirosak: 1, 2, 5;

Kékek: 3, 4, 6, 7;

(2 pont)

Ha $n > 7$, akkor az 1, 4, 7 nem lehetnek mind azonos színűek, mert az összegük osztható 3-mal. (Ezek a hárommal osztva 1 maradékot adó számok.) Tehát ezen számok között van piros és kék is. (2 pont)

A 2, 5, 8 sem lehetnek mind azonos színűek, mert az összegük osztható 3-mal. (Ezek a hárommal osztva 2 maradékot adó számok.) Tehát ezen számok között is van piros és kék is. (2 pont)

Viszont a 3-at akár pirosra, akár kékre festjük be, lesz három különböző hármas maradékot adó egyszínű szám, amelyek összege osztható hárommal. (2 pont)