A skatulya-elv alkalmazásai

FELADATOK

Számelmélet

1.
Az első $4n$ darab pozitív egész számot beosztjuk n számú halmazba. Igazoljuk, hogy mindig lesz három olyan szám, amelyek ugyanabban a halmazban vannak és valamely háromszög oldalainak mérőszámai.

2.
Az első $2n-1$ pozitív egész szám közül kiválasztunk $n+1$ darabot. Igazoljuk, hogy mindig van a kiválasztott számok között három, melyek közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével.

3.
Adott 20 darab különböző pozitív egész szám úgy, hogy egyik sem nagyobb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik között van négy egyenlő. (Mindig a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet.)

4.
a) Igazoljuk, hogy 16 egész szám között mindig van néhány, amelyek összege 16-tal osztható. (Egytagú összeget is megengedünk.)
b) Igazoljuk, hogy a 10-es számrendszerben felírt 16-jegyű pozitív egész számnak van néhány egymást követő számjegye, melyek szorzata négyzetszám. (Egytényezős szorzatot is megengedünk.)

5.
Az első $2n$ darab pozitív egész számból kiválasztunk $n+1$ darabot. Igazoljuk, hogy a kiválasztott számok között lesz két olyan, melyek közül egyik osztója a másiknak.

6.
Megadható-e minden pozitív egész n-re n darab pozitív egész szám úgy, hogy közülük néhányat összeadva sosem kapunk négyzetszámot?

7.
Határozzuk meg a $2007, 2008, \ldots, 4012$ pozitív egész számok legnagyobb páratlan osztóinak összegét!

8.
Az első 25 pozitív egész szám közül kiválasztunk 17 darabot. Igazoljuk, hogy a kiválasztott számok között biztosan lesz két olyan, amelyek szorzata négyzetszám.

9.
Van-e 12 olyan mértani sorozat, amelyek tartalmazzák az első 100 pozitív egész számot?

10.
a) Igazoljuk, hogy a 3-nak van olyan pozitív egész kitevős hatványa, melynek a 2011-gyel vett osztási maradéka 1. (Általánosítsuk az állítást!)
b) Jelölje m a legkisebb ilyen kitevőt. Igazoljuk, hogy m a 2010 osztója!

11.
Igazoljuk, hogy nincs olyan 1-nél nagyobb n egész szám, amelyre 2^n-1 osztható n-nel.

12.
Léteznek-e olyan t és n pozitív egész számok, amelyekre 7^t-3^n osztható a 10^{200} számmal?

13.
Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész *n*-re létezik olyan Fibonacci-szám, amely *n* darab 0-ra végződik.

14.
Igazoljuk, hogy az $\overline{ab}, \overline{aab}, \overline{aaab}, \ldots$ sorozatban , ahol *a* és *b* 0-tól különböző számjegyek, végtelen sok összetett szám található.

Valós számok

15.
a) Igazoljuk, hogy bármely két valós szám között van racionális szám.
b) Igazoljuk, hogy bármely két valós szám között van irracionális szám.

16.
Igazoljuk, hogy a $\sqrt{3}$-nak van olyan pozitív egész számszorosa, amely egy egész számtól kevesebb, mint 0,001-gyel tér el.

17.
A négyzetrács rácspontjai köré 0,001 sugarú körlapokat írunk.
a) Igazoljuk, hogy létezik olyan szabályos háromszög, melynek csúcsai különböző körlapokra esnek.
b) Igazoljuk, hogy minden olyan szabályos háromszög, melynek csúcsai különböző körlapokra esnek olyan, hogy oldalhosszúsága nagyobb, mint 96.

18.
Bizonyítsuk, be, hogy léteznek olyan a, b, c egész számok, hogy abszolút értékük kisebb, mint egymillió, egyszerre nem 0 az értékük és

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}.$$

19.
a) Mutassuk meg, hogy bármely 13 különböző valós szám között található két olyan: *x* és *y*, hogy

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

b) Mutassuk meg, hogy bármely négy különböző valós szám között található két olyan: *x* és *y*, hogy

$$0 < \frac{x - y}{1 + x + y + 2xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

20.
Az a_1, a_2, … , a_n tetszőleges valós számok. Igazoljuk, hogy létezik olyan x valós szám, amelyre az $x + a_1, x + a_2, \ldots, x + a_n$ számok mindegyike irracionális.

21.
Tekintsük különböző valós számoknak $(m-1)(n-1) + 1$ tagból álló sorozatát. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a sorozatból *m* tagból álló növekedő részsorozat vagy pedig kiválasztható *n* tagból álló csökkenő részsorozat.

Véges-végtelen

22.
Minden valós számokból álló számsorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

23.
Minden korlátos pontsorozatnak van torlódási pontja.

24.
a) Adott a síkon *n* darab pont. Igazoljuk, hogy van olyan egyenes a síkon, amelynek egyik partján pontosan *k* darab$(k < n)$pont van.
b) Adott a síkon *n* darab pont. Igazoljuk, hogy van olyan körlap a síkon, amely pontosan $k(k < n)$ darabot fed le közülük.

25.
a) Lefedhető-e a sík véges sok sávval? (Egy sávot két párhuzamos egyenes határol.)
b) Lefedhető-e a sík véges sok parabolatartománnyal?

26.
A sík pontjait 2011 színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy minden *n*-re$(n \geq 3)$található végtelen sok olyan konvex *n*-szög, amelyeknek a csúcsai azonos színűek!

27.
A sík pontjait három színt felhasználva kiszíneztük. Igazoljuk, hogy van két azonos színű pont, melyek egységnyi távolságra vannak egymástól.

28.
A sík pontjait véges sok színnel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan téglalap, amelynek a csúcsai azonos színűek.

29.
Igazoljuk, hogy nincs a négyzetrácson szabályos rácsötszög.

30.
Egy kockát az oldalaival párhuzamos síkokkal kisebb kockákra darabolunk fel. Igazoljuk, hogy a keletkező kockák nem lehetnek mind különböző méretűek.

Geometriai mérték

31.
Adott a síkon 1000 pont. Igazoljuk, hogy a sík bármely egységsugarú körén van olyan *M* pont, hogy *M*-nek az adott pontoktól vett távolságainak összege legalább 1000.

32.
Adott a síkon négy pont úgy, hogy bármely két pont távolsága legalább 1 egység. Igazoljuk, hogy a két legtávolabbi pont távolsága legalább$\sqrt{2}$.

33.
Egy konvex *ABCD* négyszög minden oldalának hossza kisebb, mint 24 egység. Legyen *P* a négyszög valamely belső pontja. Igazoljuk, hogy a négyszögnek van olyan csúcsa, amelynek *P*-től vett távolsága kisebb, mint 17 egység.

34.
Igaz-e, hogy minden derékszögű háromszög szétvágható egyenes vágásokkal 1000 részre részre úgy, hogy a keletkező részekből össze lehessen rakni egy négyzetet?

35.
Adott a síkon 1997 darab pont úgy, hogy semelyik három sincs rajta ugyanazon az egyenesen és bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb 1 területegység. Mutassuk meg, hogy létezik olyan egységnyi területű háromszöglap, amellyel a pontok közül legalább 500-at le lehet fedni.

36.
Egy egységnyi területű négyzetben adott 101 pont úgy, hogy semelyik három sincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy az általuk meghatározott háromszögek között van olyan, amelyiknek a területe legfeljebb 0,01 területegység.

37.
Két négyzetlap érintkezik, ha van közös pontja a kerületeiknek, de nincs közös belső pontjuk. Egy adott egységnégyzettel legfeljebb hány egységnégyzet érintkezhet, ha semelyik kettőnek sincs közös belső pontja?

38.
Tekintsük egy konvex rácsötszöget a négyzetrácson. Igazoljuk, hogy a területe legalább 2,5 területegység.

39.
Tekintsük egy $r > 1$sugarú kört a négyzetrácson. Jelöljen$n$az r sugarú körvonalon lévő rácspontok számát. Igazoljuk, hogy$n \leq 2\pi\sqrt[3]{r^2}$.

40.
Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú, 2006 egység sugarú kört. Tekintsünk továbbá a kör belsejében 400 olyan rácspontot, melyek közül semelyik három sem esik egy egyenesre. Igazoljuk, hogy azon háromszögek között, melyek csúcsai az adott rácspontok közül valók, lesz két azonos területű!

41.
Mutassuk meg, hogy egy t területű és k kerületű konvex sokszögben el lehet helyezni egy t/ksugarú kört.

42.
Egy 5 egység területű szobában 9 darab egységnyi területű szőnyeget helyezünk el. Igazoljuk, hogy van két olyan szőnyeg, amelyek legalább 1/9 arányban átfedik egymást.

43.
Megadható-e a síkon 225 darab pont úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok közül a legnagyobb legfeljebb 21, míg a legkisebb legalább 3 egység legyen?

44.
Az egységsugarú gömb főkörein kijelölünk néhány ívet úgy, hogy az ívek hosszának összege kisebb, mint π. Igazoljuk, hogy létezik olyan sík, amely átmegy a gömb középpontján és nincs közös pontja egyik kijelölt ívvel sem.

45.
Adott a térben n számú pont: P_1, P_2, … , P_n úgy, hogy e pontok közül bármelyik kisebb távolságra van egy adott P ponttól, mint a többi P_i ponttól. Igazoljuk, hogy$n < 15$.

46.
Mutassuk meg, hogy ha egy $10 \times 8 \times 6$-os téglatestben akárhogyan helyezünk is el 9 darab (egymásba nem nyúló) egységkockát, akkor biztosan elhelyezhető a téglatestben még egy egységnyi sugarú gömb is (amelynek nincs közös belső pontja egyik kockával sem és minden pontja a téglatestbe esik).

47.
Egy $5 \times 5 \times 10$-es téglatestben adott 2001 pont. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk közülük választani kettőt, amelyek távolsága kisebb, mint 0,7!

48.
Egy 9 egység oldalhosszúságú kocka belsejében adott 1981 pont. Igazoljuk, hogy a pontok között van két olyan, amelyek távolsága kisebb, mint 1 egység.

49.
Egy légitársaság a téglatest formájú bőröndök szállítását a bőrönd egy csúcsból kiinduló éleinek összhosszúságával korlátozza. Elszállítható-e egy túl nagy bőrönd úgy, hogy egy szállítható méretű másik bőröndbe csomagoljuk?

50.
Egy 2 méter sugarú kört 1996 egyenessel részekre osztottunk. Mutassuk meg, hogy a keletkező részek között lesz olyan, amelyikbe belefér egy 1 mm sugarú kör.

Szakirodalom:

Hajnal Péter: Elemi kombinatorikai feladatok, 1-5.o., Polygon, 1997
Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, 132-140.o. , Typotex, 2003
Arthur Engel: Problem-Solving Strategies, 59-82.o. Springer, 1998