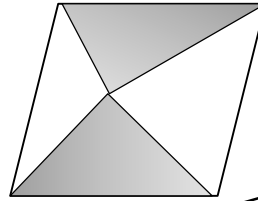


## Feladatok

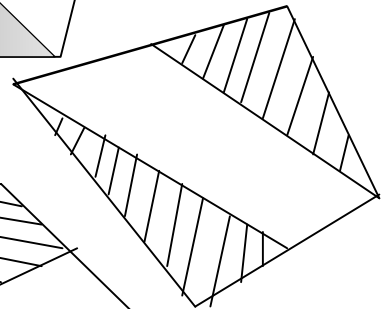
### I. Klasszikus, bevezető feladatok

1. Az alábbi feladatokban hányad része a sátrózott rész területe az eredeti négyszög területének?

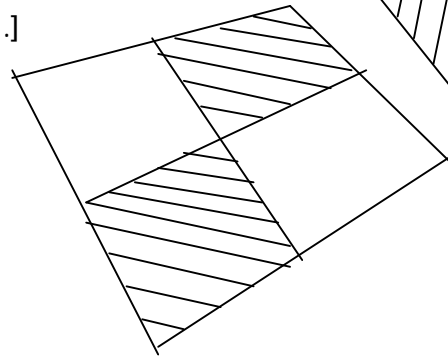
a) Egy paralelogramma valamely belső pontját összekötjük a csúcsokkal. [1.]



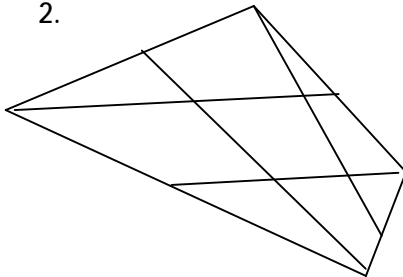
b) Egy konvex négyszög két csúcsát kötjük össze az ábrának megfelelően az oldalfelező pontokkal. [1.]



c) Behúzzuk egy négyszög középvonalait. [1.]



2.

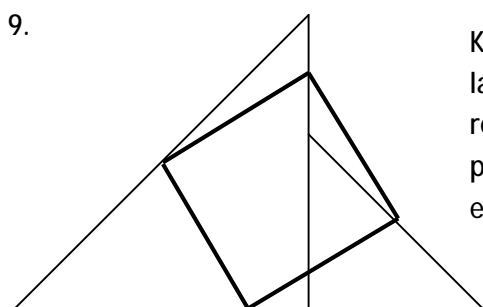


Összekötjük egy négyszög csúcsait az ábrának megfelelően az oldalak felezőpontjával. Bizonyítsuk be, hogy az oldalaknál keletkezett négy kis háromszög területének az összege egyenlő a középső négyszög területével!

- Húzzuk be egy trapéz két átlóját, ezzel a trapézt négy háromszögre bontjuk. Bizonyítsuk be, hogy a száraknál keletkező két háromszög területe egyenlő! [1.]
- Behúzzuk egy konvex négyszög két átlóját, ezzel a négyszöget négy háromszögre bontjuk. Igaz-e, hogy ha valamely két szemközti oldalhoz tartozó háromszög területe egyenlő, akkor a négyszög trapéz?
- Az ABCD trapéz AB, ill. CD alapján felvesszük a P és Q pontokat. A PD és QA szakaszok metszéspontja legyen R, a PC és QB szakaszoké S! Bizonyítsuk be, hogy a PSQR négyszög területe egyenlő az ARD és BCS háromszögek területének összegével! [1.]

II. Versenyfeladatok

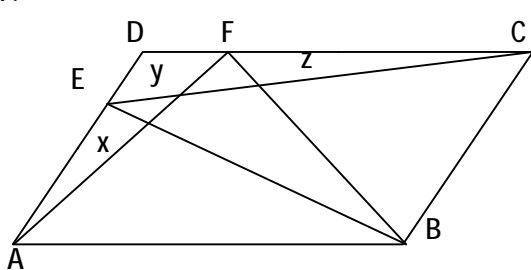
1. Az ABC háromszög területe 4 egység. Meghosszabbítjuk az AB oldalát a B-n túl az AB szakasz felével, így kapjuk a P pontot, a BC-t a C-n túl a saját felével, így kapjuk a Q pontot és a CA oldalt az A-n túl a CA felével, így megkapjuk az R pontot. Mekkora a PQR háromszög területe? [4.]
2. Adott az ABCD konvex négyszög, melynek területe T. Jelölje E, F, G, H rendre az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontját! Adjuk meg az ABF, BCG, CDH, ADE háromszögek területének az összegét! [5.] (I. 1./b)
3. Az ABCD négyszög AB oldalát a B-n túl meghosszabbítjuk az AB szakasszal, így kapjuk a P pontot, a BC-t a C-n túl a BC-vel, így kapjuk a Q pontot, a CD oldalt a D-n túl a CD-vel, így megkapjuk az R pontot, végül a DA-t az A-n túl DA-val, így az S ponthoz jutunk. Hányszorosa a PQRS négyszög területe az ABCD négyszög területének?
4. Egy háromszög egyik oldala 26 cm, a másik két oldalhoz tartozó súlyvonala 20 cm, ill. 36 cm. Mekkora a háromszög területe?
5. Az ABCD konvex négyszög AB oldalának felezőpontja F, BC oldaláé G, CD oldaláé H, míg DA oldaláé I. Az AG és CF szakasz metszéspontja legyen K míg az AH és CI szakaszé L. Hányad része az AKCL négyszög területe az ABCD négyszög területének?
6. Egy rombusz egyik átlója kétszerese a másik átlójának. Elforgatjuk  $90^\circ$ -kal a rombuszt az átlóinak metszéspontja körül. Hányadrésze a két rombusz metszetének területe a rombusz területének?
7. Egy négyzet minden csúcsát összekötjük az azt nem tartalmazó oldalak felezőpontjával, így a négyzet közepén keletkezik egy nyolcszög. Hányad része a négyzet területének a nyolcszög területe?
8. Számítsuk ki egy háromszög és a súlyvonalaiból szerkesztett háromszög területének az arányát! [4.]



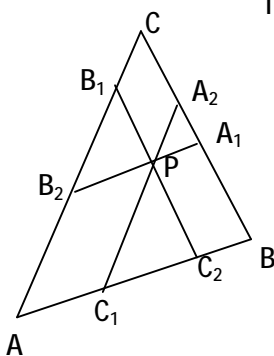
Két egyenlő szárú derékszögű háromszöget az ábrán látható módon egymáshoz illesztettünk. Hányad része az így kialakuló konkáv négyszög oldalfelezési pontjai által meghatározott négyszög területe az eredeti négyszög területének! [6.]

10. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! A paralelogramma területe hányad része a négyszög területének? [9.] (Pierre Varignon tétele 1731.)
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex négyszög átdarabolható paralelogrammává!
12. Igazoljuk, hogy ha egy konvex négyszög területét mindkét középvonala felezi, akkor a négyszög paralelogramma! [2.]

13. Az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja legyen H. Milyen arányban osztja az A csúcsból induló súlyvonal és a CH szakasz egymást?(Más formában [5.])
14. Az ABC háromszög A-hoz közelebbi negyedelő pontja legyen N, a BC oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja G! Milyen arányban osztja egymást a CN és az AG szakasz?
15. Az előző feladatot egészítsük ki azzal, hogy felvesszük az AC oldal C-hez közelebbi negyedelő pontját, ami legyen L. A CN, AG és BL szakaszok páronkénti metszéspontja meghatároz egy háromszöget. Hányad része ezen háromszög területe az ABC háromszög területének?
16. Az ABC háromszög BC oldalát a D pont  $BD : DC = 1 : 3$  arányban osztja, míg az O pont az AD szakaszt  $AO : OD = 5 : 2$  arányban osztja. Milyen arányban osztja a BO egyenes az AC oldalt? [6.] Az AD átmérőjű félkör ívét a B és C pontok három egyenlő hosszú ívre bontják. Mekkora az AB, AC húrok és a BC ív által határolt síkidom területe, ha a félkör területe T?[4.]
- 17.



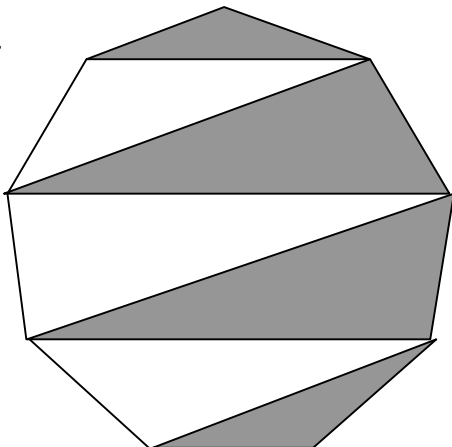
Az ABCD paralelogramma DC oldalának egy tetszőleges pontja legyen F, az AD oldalának tetszőleges pontja E! Az ABF és a CEB háromszögek területének közös része hányadrésze az ábrán x, y, z-vel jelölt részek területösszegének? (I. 1./a)



18. Az ABC háromszög belső P pontján keresztül az oldalakkal párhuzamosokat húzunk. Az ábrán jelöltük a párhuzamosok oldalakkal vett metszéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy az  $A_1B_1C_1$  háromszög területe egyenlő az  $A_2B_2C_2$  háromszög területével! [4.] (I. 1./a)

19. Az előző feladat háromszögében húzzuk be az  $AA_1$  a  $BB_1$  és a  $CC_1$  szakaszokat. Ezek létrehoznak a háromszög közepén és az ABC háromszög csúcsainál egy-egy háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy ezen utóbbi háromszögek területének összege egyenlő a középső háromszög területével! [7.]

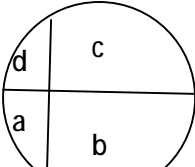
20.



Egy szabályos 9-szögöt 6 átlónak az ábrán látható módon történő behúzásával felosztottunk háromszögekre. Melyik terület a nagyobb: a sátirozott, vagy az üres? [6.] (I. 3.)

21. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja  $A_1$ . Legyenek  $B_1$  az AC, ill.  $C_1$  az AB oldalegyenesnek olyan pontjai, hogy  $AA_1$ ,  $BB_1$ , és  $CC_1$  szakaszok párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy az  $A_1B_1C_1$  háromszög területe kétszerese az ABC háromszög területének! [5.] (I. 3.)

22. Az AD átmérőjű félkör ívét a B és C pontok három egyenlő hosszú ívre bontják. Mekkora az AB, AC húrok és a BC ív által határolt síkidom területe, ha a félkör területe T?[4.]

23.  Egy 3 cm sugarú kör belsejében felvettünk két merőleges húr, melyek közül az egyik 2 cm, a másik 1 cm távolságra van a kör középpontjától. A keletkezett négy rész területét az ábra szerint a, b, c, d-vel jelöltük. Határozzuk meg a  $(a+c)-(b+d)$  értéket! [3.]

24. Egy háromszög egyik oldalán adott egy pont. Szerkesszünk ezen a ponton keresztül olyan egyenest, amely felezi a háromszög területét! [1.] (I. 3.)

25. Egy konvex négyszög egyik csúcsán keresztül szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a négyszög területét! [1.] (I. 3.)

26. Rajzoljunk egy háromszög egyik oldala fölé kifelé egy tetszés szerinti körívet! Ennek felezőpontjából szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a háromszögből és a körszeletből álló idom területét! [5.] (I. 3.)

27. Az ABC hegyesszögű háromszög BC oldalára kifelé emeltük a BCDE négyzetet. Legyen F a DE oldal felezőpontja. Szerkesszünk F-en át olyan egyenest, amely felezi az ABEDC ötszög területét! [5.] (I. 3.)

28. Adott egy konvex szögtartomány belsejében egy pont. Szerkesszünk olyan egyenest, amely keresztül megy a ponton és a legkisebb területű háromszöget vágja le a szögtartományból! (I. 1/a)

29. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint ugyanezen az oldalon egy tetszőleges pontnak a másik két oldaltól mért távolságainak az összege! [3.]

30. Egy negyedkörbe téglalapot írunk, melynek egyik csúcsa körívre, egy-egy csúcsa a határoló sugarakra, a negyedik csúcsa kör középpontjába illeszkedik. Az ilyen téglalapok közül melyiknek legnagyobb a területe? [3.]

31. Az ABCD négyzet belsejében levő P pontra igaz, hogy  $\angle APB = 90^\circ$  és  $PB - PA = 2$ . Számítsuk ki P-nek a négyzet középpontjától mért távolságát!

32. Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszögben a befogók összege kisebb az átfogó és a hozzátartozó magasság összegénél! [3.]

III. A jövő (középiskolai feladatok)

1. \*Az  $ABCD$  konvex négyszög  $AB$  és  $CD$  oldalegyenesei az  $E$  pontban metszik egymást. Az  $AC$  átló felezőpontja  $F$ , a  $BD$  átló felezőpontja  $G$ . Hogyan aránylik egymáshoz az  $FEG$  háromszög és az  $ABCD$  négyszög területe? [8.] [9.] (Varignon-problémakör)
2. \* Az  $ABC$  háromszög  $B$  és  $C$  csúcsaira illeszkedő kör az  $AB$  oldalt  $D$ -ben, az  $AC$  oldalt  $E$ -ben metszi. A  $BC$  oldal felezőpontja  $F$ , az  $AF$  és  $DE$  szakaszok metszéspontja  $G$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{GD}{GE} = \frac{AC^2}{AB^2}$ . [8.]
3. \*Az  $ABC$   $\Delta$   $C$ -ből induló belső szögfelezője a  $B$ -ből induló súlyvonalat a  $P$ , az  $AB$  oldalt pedig a  $T$  pontban metszi. Mutassuk meg, hogy  $\frac{CP}{PT} - \frac{AC}{BC} = 1$ ! [6.]
4. Egy négyszög két szemközti oldalát osszuk fel  $n$  egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontokat kössük össze! Bizonyítsuk be, hogy az így kapott  $n$  db diszjunk belsővel rendelkező négyszög területe számtani sorozatot alkot!
5. \*Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel  $n$  egyenlő részre, majd kössük össze a szemközti oldalakon levő megfelelő osztópontokat! Válasszunk ki az így keletkező  $n^2$  négyszög közül  $n$  db-ot úgy, hogy közülük semelyik kettő ne legyen azonos sávban. Bizonyítsuk be, hogy ezen négyszögek területének összege egyenlő az eredeti négyszög területének az  $n$ -ed részével! [2.]
6. \* Az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldalán felvesszük a  $C'$ , a  $BC$  oldalán az  $A'$  és a  $CA$  oldalán a  $B'$  pontot, majd megrajzoljuk az  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  szakaszokat, melyek a háromszöget négy kis háromszögre és három négyszögre bontják. Hogyan kell felvenni az  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  pontokat, hogy a négy kis háromszög területe egyenlő legyen? Bizonyítsuk be, hogy ekkor a négyszögek területe is egyenlő! Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi egy háromszög kerületét és területét is!
7. \*Adott egy konvex sokszög. Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a sokszög területét! [2.]
8. \*Egy háromszög adott pontján keresztül szerkesszünk olyan egyeneseket, melyek harmadolják a háromszög területét! [2.]
9. Szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi egy háromszög kerületét és területét is!

A feladatok forrása:

[1.] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

[2.] KöMaL

[3.] Varga Tamás Matematikaverseny

[4.] Kalmár László Matematikaverseny

[5.] Bátaszéki Matematikaverseny

[6.] Schultz János

[7.] Dr. Katz Sándor

[8.] Szókefalvi-Nagy Gyula Emlékverseny

[9.] Coxeter-Greitzer: Újra felfedezett matematika