Számelméleti feladatok az általános iskolai versenyek tükrében

dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

1. *Mutasd meg, hogy a tízes számrendszerben felírt*

1111112111111

tizenhárom jegyű szám összetett szám, azaz felírható két, 1-nél nagyobb egész szám szorzataként.

(Kalmár verseny, megyei döntő 7. osztály, 2007.)

Megoldás:

$$1111112111111 = 1111111000000 + 1111111 =$$
$$= 1111111 \cdot 1000000 + 1111111 \cdot 1 = 1111111 \cdot (1000000 + 1) = 1111111 \cdot 1000001$$

2. *Bontsd fel a következő tízjegyű számot két egymást követő pozitív egész szám szorzatára: 1111122222.*

(Kalmár verseny, megyei döntő 6. osztály, 2007.)

Megoldás:

Egy szorzattá bontási lehetőség az előző alapján a következő:

$$1111122222 = 1111100000 + 22222 = 11111 \cdot 100000 + 11111 \cdot 2 =$$
$$= 11111 \cdot (100000 + 2) = 11111 \cdot 100002$$

Csak ez nem felel meg a feladat kikötésének, mert nem két egymást követő szám szorzata. Induljunk ki a végződésből! Hogy a szorzat 2-re végződjön egy 3 és egy 4-re végződő számot, vagy egy 6-ra és 7-re végződő számot kell összeszoroznunk.
Megfigyelhetjük a következőket: $6 \cdot 7 = 42$, $66 \cdot 67 = 4422$, $666 \cdot 667 = 444222$ és ez a tulajdonság öröklődik.

A másik lehetőségnél: $3 \cdot 4 = 12$, $33 \cdot 34 = 1122$, $333 \cdot 334 = 111222$, $3333 \cdot 3334 = 11112222$ így $33333 \cdot 33334 = 1111122222$.

3. *Felbontható-e két egymást követő pozitív egész szám szorzatára* $3^{11}+1$?

(Kalmár verseny, országos döntő, 6. osztály 1997.)

Megoldás:

Először vizsgáljuk meg a $3^{11}+1$ szám végződését. A 3 hatványainak utolsó számjegye periodikusan ismétlődnek: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... Ezért a 3^{11} utolsó számjegye 7.
Tudjuk, hogy két szám szorzatának az utolsó jegyét a két utolsó számjegy szorzatának végződése adja. Ezért nézzük meg, hogy a szomszédos számok szorzatának mi a végződése! Végiggondolva láthatjuk, hogy csak 0, 2, vagy 6 lehet. Ezért a $3^{11}+1$ számot nem lehet felbontani két szomszédos egész szám szorzatára.

4. *Van-e olyan háromjegyű tízes számrendszerben felírt szám, amelynek 25 pozitív osztója van*?

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 2007.)

Megoldás:

A keresett szám prímtényezős felbontása vagy p^{24} vagy $p^4 \cdot q^4$ alakú lehet, ahol *p* és *q* prímszám. 2^{24} már nem háromjegyű, a második másik lehetséges esetben hasonló a helyzet, mert a két legkisebb prímszámot tekintve $2^4 \cdot 3^4 = 1296$ szintén nem háromjegyű szám adódik. Tehát nincs olyan háromjegyű szám, amely a feltételeknek megfelelne.

5. *Keress olyan pozitív egész számot, amely osztható 3-mal is és 4-gyel is, és 6 különböző pozitív osztója van*.
Van-e olyan 3-mal is és 4-gyel is osztható pozitív egész szám, aminek 7 különböző osztója van?

(Kalmár verseny, országos döntő, 5. osztály 1994.)

Megoldás:

Például a $12 = 2^2 \cdot 3$ megfelelő, hiszen az osztók számát a $(2+1)\cdot(1+1) = 3\cdot 2$ képlet adja. Ebből következik, hogy 7 különböző osztó nem fordulhat elő a 3-mal és 4-gyel osztható számok körében, hiszen ezeknek csak

$(2+x)\cdot(1+y)\cdot z$ alakú lehet az osztóinak a száma, ahol x, y, z egészek és $z \geq 1$. A 7 prímszám pedig nem írható fel ilyen alakban.

6. *Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul*?

(Kalmár verseny, megyei döntő, 6. osztály 1995.)

Megoldás:

Legyen a keresett szám *n*. Ha ehhez 2-t adunk, akkor ez a szám osztható lesz 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal is. Mivel a legkisebb adott tulajdonságú számot keressük, $n+2$ a 3; 4; 5; 6 számok legkisebb közös többszöröse, azaz 60. A keresett szám tehát az 58 és könnyű ellenőrizni, hogy valóban megfelel a feltételeknek.

7. *Tudjuk, hogy tíz pozitív egész szám összege 1998. Mennyi lehet legfeljebb a 10 szám legnagyobb közös osztója*?

(Kalmár verseny, megyei döntő, 8. osztály 1998.)

Megoldás:

Legyenek szóban forgó pozitív számok $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{10}$ és *d* a legnagyobb közös osztójuk. Mindegyik szám legalább *d* és a tíz szám összege 1998, ezért

$$10d < 1998 < 2000, \text{ tehát } d < 200.$$

A számok legnagyobb közös osztója természetesen osztója az összegüknek is, tehát *d* osztója 1998-nak. Az $1998 = 2\cdot 3^3 \cdot 37$, ebből adódik, hogy 1998 legnagyobb, 200-nál kisebb osztója 111. A 111, mint legnagyobb közös osztó elő is fordul, ha például

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 111 \text{ és } a_{10} = 999\ .$$

Ezeknek a számoknak az összege 1998, és a legnagyobb közös osztója 111.

8. *Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív páros szám pozitív páros osztóinak az összege nagyobb, mint a pozitív páratlan osztók összege*.

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 7. osztály, 1992.)

Megoldás:

A szám bármely páratlan p osztójához rendeljük hozzá ennek a kétszeresét, amely a szám páros volta miatt szintén osztója a számnak. Így a szám különböző páratlan osztóihoz különböző páros osztókat rendeltünk. Ennél fogva a páratlan pozitív osztóinak az összege legfeljebb fele a páros pozitív osztók összegének.

Megjegyzés: Ha egy szám valamely páratlan szám kétszerese, akkor a pozitív páratlan osztóinak az összege fele a pozitív páros osztók összegének.
Általánosan: Ha egy páros számnak a 2^n osztója, akkor a szám pozitív páros osztóinak az összege legalább $2\left(2^n-1\right)$-szerese a pozitív páratlan osztók összegének.

9. *49, nem feltétlenül különböző pozitív egész szám összege 999. Mekkora lehet ezen számok legnagyobb közös osztójának legnagyobb értéke*?

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 7. osztály II. kategória, 2000.)

Megoldás:

Osszuk el a számokat a legnagyobb közös osztójukkal! Így 49 pozitív egész számot kapunk, melyek összege legalább 49. Ezt az összeget úgy is megkaphattuk volna, hogy a 999-et osztjuk el a legnagyobb közös osztóval. Tehát a 999 osztói közül azokat kell megvizsgálni, amelyek legalább 49-szer megvannak 999-ben. $999=3^3\cdot 37$, a legnagyobb megfelelő osztó a 9. Azaz a számok legnagyobb közös osztója a 9 lehet. Megfelelő 49 számot többféleképpen lehet találni, pl. vegyünk 48 darab 9-est a 49. szám pedig legyen $999-48\cdot 9=567$. Ezek a számok minden feltételnek megfelelnek.

10. *Igazoljuk, hogy a 376 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa 376-ra végződik.*

(Kalmár verseny, országos döntő, 6. osztály 1995.)

Megoldás:

Legyen $A = 376$ és B egy tetszőleges (akárhány jegyű) pozitív egész szám. Szorozzuk meg a $\overline{BA}$ alaki értékű számot A-val!

$$\overline{BA} \cdot A = (1000B + A) \cdot A = 1000AB + A^2 .$$

A szorzás eredménye azt mutatja, hogy a szorzat utolsó három jegyét az A^2 utolsó három számjegye határozza meg. De $A^2 = 141376$ és ezzel a feladat állítását igazoltuk.

11. *Adott 9 pozitív egész szám: $a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_5;\, a_6;\, a_7;\, a_8;\, a_9$. Ugyanezek a számok, csak más sorrendben legyenek $b_1;\, b_2;\, b_3;\, b_4;\, b_5;\, b_6;\, b_7;\, b_8;\, b_9$. Mit állíthatunk az*

$$(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot (a_3 - b_3) \cdot (a_4 - b_4) \cdot (a_5 - b_5) \cdot (a_6 - b_6) \cdot$$
$$\cdot (a_7 - b_7) \cdot (a_8 - b_8) \cdot (a_9 - b_9)$$

szorzatról: páros, vagy páratlan?

(Kalmár verseny, megyei döntő, 8. osztály 2004.)

Megoldás:

A megoldás ötlete az, hogy két azonos paritású szám különbsége páros. Az $a_1;\, a_2;\, a_3;\, a_4;\, a_5;\, a_6;\, a_7;\, a_8;\, a_9$ 9 pozitív szám közül legalább 5-nek azonos a paritása, így legfeljebb 4 ellentétes paritású b_i lehet az ő párjuk, tehát legalább egy kivonás két azonos paritású számmal történik, és akkor ez a tényező páros, így az egész szorzat is páros.

12. *Csaba felírt a táblára egy csupa 1-esekből álló (tízes számrendszerben felírt) számot. Kivont belőle 9-et, majd az eredményt elosztotta 9-cel. Így egy érdekes nyolcjegyű számot kapott. Melyik volt ez a nyolcjegyű szám?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 5. osztály 1985.)

Megoldás:

Mivel a 9-cel történő osztást követően egész számhoz jutott, ezért az eredeti csupa 1-esből álló számnak is oszthatónak kellett lenni 9-cel, így az eredeti szám jegyeinek az összege osztható 9-cel. Mivel az osztást követően 8-jegyű számot kapott, nem lehetett 9-jegyűnél nagyobb az eredeti szám. Tehát az eredeti szám az 111 111 111 volt. Ha 9-et elvett belőle és elosztotta 9-cel az 12345678 számot kapta.

13. *Osztható-e 10-zel a* $73^{73} + 37^{37}$ *szám?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1981.)

Megoldás:

Arra kell gondolni, hogy két szám szorzatának utolsó jegye a két szám utolsó jegyének a szorzatának a végződése lesz. Ezért a 73 hatványainak végződése 1-től sorban a következő lesz: 3; 9; 7; 1; 3; ... . Tehát 4-es periódussal ismétlődik. Mivel $73 = 18 \cdot 4 + 1$ alakú, 73^{73} 3-ra fog végződni. Hasonlóan okoskodva 37 hatványainak a végződése 7; 9; 3; 1; 7; ... . A 37 4-es maradéka is 1, ezért 37^{37} 7-re fog végződni, ezért az összegük 0-ra végződik, azaz osztható 10-zel.

14. *Bizonyítsuk be, hogy öt darab pozitív egész szám negyedik hatványai közül kiválasztható két olyan, amelyek különbsége osztható 10-zel.*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 7. osztály II. kategória, 2002.)

Megoldás:

A négyzetszámok végződése 0, 1, 4, 5, 6 és 9 lehet. Az ilyen számok négyzeteinek a végződése pedig, 0, 1, 6 és 5 lehet. Így az adott 5 szám közül lesz legalább kettő, melyek végződése megegyezik, így a különbségük osztható 10-zel.

15. *A 948 és a 417 mindegyikét ugyanazzal a kétjegyű számmal elosztva egyenlő maradékokat kapok. Mekkora ez a maradék?*

(Varga Tamás verseny, iskolai forduló, 6. osztály, 1993.)

Megoldás:

A két szám egyenlő maradéka miatt a két szám különbsége, az 531 osztható a kétjegyű számmal. De $531 = 3 \cdot 3 \cdot 59$, így az 531-nek egyetlen kétjegyű osztója van, az 59. Így a maradék 4, mert $948 = 16 \cdot 59 + 4$ és $417 = 7 \cdot 59 + 4$.

16. *Add meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amellyel az 1993-at megszorozva olyan többszörösét kapod, amelynek 1994 az utolsó négy jegye.*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 7. osztály I. kategória, 1994.)

Megoldás:

A megoldás azon alapszik, hogy a 1993-at írásban (jobbról kezdve) megszorozzuk egy számmal és figyeljük a végződéseket a maradékátvitellel együtt. Ezért a szorzó utolsó számjegye 8, hogy az összeadás után a szorzat utolsó számjegye 4 legyen. De ekkor 8-cal el is végezhetjük a szorzást:

$$\begin{array}{r} \underline{1993}\cdot\_\,\_\,\_\,8 \\ 15944 \\ \\ \underline{+\qquad\quad} \\ 4 \end{array}$$

Ahhoz, hogy az összeadásnál a négyes előtt 9-es jegy álljon a szorzásnál az 4-es alatt 5-ösnek kell állnia, de ekkor a szorzóban a 8-as előtt 5-ösnek kell állni.

$$\begin{array}{r} \underline{1993}\cdot\_\,\_\,58 \\ 15944 \\ 9965 \\ \\ \underline{+\qquad\quad} \\ 94 \end{array}$$

Az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy 4858-cal kell megszorozni az 1993-at. Valóban, $1993 \cdot 4858 = 9681994$.

17. *Melyik az a természetes szám, amellyel a 273437-et osztva 17-et, a 272758-at osztva 13-at ad maradékul?*

(Varga Tamás verseny, megyei forduló, 8. osztály II. kategória, 1998.)

Megoldás:

Jelölje n a keresett számot. Ekkor $273420 = k \cdot n$ és $272745 = l \cdot n$, azaz n osztója mind a 273420-nak, mind a 272745-nek. n tehát ennek a két számnak a legnagyobb közös osztójának 17-nél nagyobb osztója.
A prímtényezős felbontások:

$$273420 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31, \; 272745 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 551,$$

ezért a legnagyobb közös osztójuk a 45, és ennek 17-nél nagyobb osztója csak a 45. Ez megfelel a feltételnek, mert

$$273437 = 45 \cdot 6076 + 17 \text{ és } 272758 = 45 \cdot 6061 + 13.$$

18. *Melyik nagyobb:* $\frac{3}{4}$ *vagy* $\frac{3000001}{4000001}$*?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 5. osztály 1983.)

I. Megoldás:

Ha *a, b, c, d* pozitív egész számok, akkor $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ reláció pontosan akkor igaz, ha $ad < bc$. Jelen esetben $3000001 \cdot 4 = 12000004 > 12000003 = 4000001 \cdot 3$, ezért $\frac{3000001}{4000001} > \frac{3}{4}$.

II. Megoldás:

$$\frac{3000001}{4000001} = 1 - \frac{1000000}{4000001} > 1 - \frac{1000000}{4000000} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

19. *Melyik tört a nagyobb:*

$$\frac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1} \quad \textit{vagy} \quad \frac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1} \ ?$$

(Kalmár verseny, megyei döntő, 8. osztály 1987.)

I. Megoldás:

Vezessük be a következő jelölést: $a=10^{1986}$. Ekkor a két tört: $\dfrac{a+1}{10a+1}$ és $\dfrac{a+1}{100a+1}$. Képezzük pl. a két tört hányadosát:

$$\frac{a+1}{10a+1} : \frac{a+1}{100a+1} = \frac{a+1}{10a+1} \cdot \frac{100a+1}{a+1} = \frac{100a^2+101a+1}{100a^2+20a+1} > 1,$$

tehát

$$\frac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1} > \frac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1} \ .$$

II. Megoldás:

$$\frac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1} = 1-\frac{10^{1987}-10^{1986}}{10^{1987}+1} = 1-\frac{10^{1988}-10^{1987}}{10^{1988}+10} > 1-\frac{10^{1988}-10^{1987}}{10^{1988}+1} =$$
$$= \frac{10^{1988}+1-10^{1988}+10^{1987}}{10^{1998}+1} = \frac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1} \ .$$

20. *Melyik szám a nagyobb és miért:* 99^{20} *vagy* 9999^{10} *?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1990.)

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $9999 > 9801 = 99^2$. Ezért $9999^{10} > \left(99^2\right)^{10} = 99^{20}$.

Máshogy: $9999^{10} > 9900^{10} = \left(99\cdot 100\right)^{10} = 99^{10}\cdot 100^{10} > 99^{10}\cdot 99^{10} = 99^{20}$.

21. *Melyik szám kisebb,* $2^{100}+3^{100}$ *vagy* 4^{100}*? Zsebszámológép használata nélkül döntsük el.*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 2004.)

Megoldás:

Képezzük a két szám hányadosát!

$$\frac{2^{100}+3^{100}}{4^{100}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\left(\frac{3}{4}\right)^{100}.$$

Megmutatjuk, hogy mindegyik hatvány kisebb 0,5-nél.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=\left(\frac{1}{4}\right)^{50}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{100}=\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{4}\right)^{25}=\left(\frac{81}{256}\right)^{25}<\left(\frac{1}{2}\right)^{25}<\frac{1}{2}.$$

Így $\frac{2^{100}+3^{100}}{4^{100}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}+\left(\frac{3}{4}\right)^{100}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, azaz $2^{100}+3^{100}<4^{100}$.

22. *Melyek azok a páros számok, amelyek előállíthatók két négyzetszám különbségeként?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1988.)

Megoldás:

Próbálkozással megsejthetjük, hogy a 4-gyel osztható számok előállíthatók a kívánt alakban. Legyen n egy pozitív egész szám.

Ekkor $(n+1)^2-(n-1)^2=2n\cdot 2=4n$. Tehát a 4-gyel osztható számok előállíthatók két négyzetszám különbségeként.

Még be kell látnunk, hogy más páros szám $(4n+2$ alakú páros szám$)$ nem állítható elő.

Tekintettel arra, hogy a négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak, két négyzetszám különbsége $1-1=0,\ 1-0=1,\ 0-1=3,\ 0-0=0$ maradékot adhat. Tehát kettőt nem adhat maradékul.

23. *Keress olyan pozitív egész számot, amelyet 2-vel szorozva négyzetszámot, 3-mal szorozva köbszámot, 5-tel szorozva teljes ötödik hatványt kapunk.*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 8. osztály 1989.)

Megoldás:

A megoldáshoz felhasználjuk, hogy egy n szám akkor k-adik hatvány, ha n prímtényezős felbontásában minden prímtényező kitevője k többszöröse. Előállítjuk a legkisebb ilyen számot.
A mondottak szerint akkor n prímtényezős felbontásában csak a 2, 3 és 5 prímtényezők szerepelnek. Vegyük figyelembe továbbá, hogy ha 2-vel, 3-mal vagy 5-tel szorozzuk n-et, akkor csak a 2, 3, 5 prímtényező kitevője növekszik 1-gyel. Tegyük fel, hogy $n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$. A mondottak szerint 2^{α} köbszám is és ötödik hatvány is, és ha 2-vel szorozzuk, akkor négyzetszám is. Tehát a legkisebb számban $\alpha = 15$. Hasonló meggondolással, β 5-nek olyan páros többszöröse, ha 1-et hozzáadunk, akkor 3-mal is osztható lesz, így $\beta = 20$. Végül $\gamma = 24$. A legkisebb ilyen szám pedig $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

24. *Lehet-e egy pozitív egész szám négyzete a következő szám:* $1998^{15} + 2$. *Állításodat indokold.*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1998.)

Megoldás:

Mivel $1998^{15} = 1998 \cdot 1998 \cdot ... \cdot 1998$, ezért biztosan 4 többszöröse.

Ezért $1998^{15} + 2 = 4k + 2$ alakú szám, azaz néggyel osztva kettőt ad maradékul. Az ilyen szám viszont nem lehet négyzetszám, mert a négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak. Tehát az adott szám nem lehet négyzetszám.

25. *Négyzetszám-e a következő kivonás eredményeként kapott szám*:

$$11\,111\,112\,222\,222 - 3\,333\,333?$$

(Kalmár verseny, országos döntő, 7. osztály 2000.)

I. Megoldás:

Vizsgáljunk egyszerűbb eseteket!

$$12-3=9=3^2;\ \ 1122-33=1089=33^2;\ \ 111222-333=110889=333^2;$$
$$11112222-3333=11108889=3333^2;\ ....$$

Ezek alapján azt sejtjük, hogy

$$11111112222222-3333333=3333333^2\ .$$

Ennek igazolása kedvéért végezzük el a következő műveletet:

$$3333333^2+3333333=3333333\cdot\left(3333333+1\right)=3333333\cdot 3333334.$$

Ha elvégezzük ezt a szorzást, eredményül 11111112222222 – őt kapunk.
Ezzel beláttuk, hogy $11111112222222-3333333=3333333^2$.

II. Megoldás:

Végezzük el a következő átalakításokat:

$$11111112222222-3333333=11111110000000+2222222-3333333=$$
$$=1111111\cdot 10^7-1111111=1111111\cdot\left(10^7-1\right)=\frac{9999999}{9}\cdot 9999999=$$
$$=\left(\frac{9999999}{3}\right)^2=3333333^2.$$

26. *Bizonyítsd be, hogy* 5^n *bármely* $n\geq 1$ *egész esetén előáll két négyzetszám összegeként.*
(Varga Tamás verseny, országos döntő, 8. osztály II. kategória, 1996.)

Megoldás:

$n=1$ esetén $5^1=5=1^2+2^2$.
$n=2$ esetén $5^2=25=3^2+4^2$.

Ezek felhasználásával, ha $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$5^n = 5^{2k+1} = 5^{2k} \cdot 5 = \left(5^k\right)^2 \cdot \left(1^2 + 2^2\right) = \left(5^k\right)^2 + \left(2 \cdot 5^k\right)^2,$$

ha $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$5^n = 5^{2k} = 5^2 \cdot 5^{2k-2} = \left(3^2 + 4^2\right) \cdot 5^{2(k-1)} =$$
$$= 3^2 \cdot 5^{2(k-1)} + 4^2 \cdot 5^{2(k-1)} = \left(3 \cdot 5^{k-1}\right)^2 + \left(4 \cdot 5^{k-1}\right)^2.$$

27. *Melyik az az n természetes szám, amelyre az $n+125$ is, és az $n+201$ is négyzetszám?*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 8. osztály I. kategória, 2002.)

Megoldás:

Legyen $n+125 = p^2,\ n+201 = q^2$, ahol p és q egész szám. Ismert, hogy

$$q^2 - p^2 = (q+p)(q-p) = 76 = 2 \cdot 2 \cdot 19,$$

továbbá, hogy $q-p$ és $q+p$ paritása megegyezik. Mivel $q^2 - p^2 = 76$ (páros), ezért a 76-ot két páros szám szorzatára kell bontani, de ez csak vagy a $2 \cdot 38$ vagy $(-2)\cdot(-38)$ lehet. Ha $q+p = 38,\ q-p = 2$, akkor összeadva két egyenletet azt kapjuk, hogy $q = 20$ és $p = 18$. Ha $q+p = -38,\ q-p = -2$, akkor $q = -20$ és $p = -18$ adódik. Ezek szerint $n+125 = (\pm 18)^2 = 324$, $n+201 = (\pm 20)^2 = 400$, azaz $n = 199$ $(= 324-125 = 400-201)$.

28. *Tudjuk, hogy p és q olyan pozitív egész számok, amelyekre $3p+4q$ osztható 11-gyel. Igaz-e, hogy ekkor $p+5q$ is osztható 11-gyel?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1991.)

Megoldás:

Tekintettel arra, hogy $(3;11)=1$, elég belátni, hogy $11\mid 3(p+5q)$.

$$3(p+5q)=3p+15q=\underbrace{3p+4q}_{11|}+\underbrace{11q}_{11|}.$$

Mivel az összeg mindkét tagja osztható 11-gyel, ezért az összeg is.

29. *Milyen p prímekre lesz* $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$ *és* $6p+1$ *mindegyike prím?*

(Kalmár verseny, megyei döntő, 7. osztály 1992.)

Megoldás:

Ellenőrizhető, hogy a $p=2;3$ nem megoldás, viszont a $p=5$ megoldása a feladatnak. Bebizonyítjuk, hogy más megoldás nincs. Ehhez vizsgáljuk az egyes kifejezéseket *p* ötös maradéka szerint. A továbbiakban tegyük fel, hogy $p>5$ és *k* egynél nagyobb pozitív egészet jelöl.

Ha $p=5k+1$ alakú, akkor $5\mid 3p+2=15k+3+2=15k+5$.

Ha $p=5k+2$ alakú, akkor $5\mid 2p+1=10k+4+1=10k+5$.

Ha $p=5k+3$ alakú, akkor $5\mid 4p+3=20k+12+3=20k+15$.

Ha $p=5k+4$ alakú, akkor $5\mid 6p+1=30k+24+1=30k+25$.

Látható, hogy az adott számok mindegyike nem prím a további esetekben.
A feladat egyetlen megoldása: $p=5$.

30. *Adott egy tízes számrendszerbeli ötjegyű szám. A szám osztható 5-tel és felbontható egymás utáni prímszámok négyzetének szorzatára. Mi lehet ez a szám?*

(Varga Tamás verseny, megyei forduló, 8. osztály, 1989.)

Megoldás:

Mivel a szám osztható 5-tel, ami prímszám és a keresett szám egymást követő prímszámok négyzetének szorzata, így a keresett szám tényezőinek az egyike a $25=5^2$. Az $5^2\cdot 7^2\cdot 11^2=148225$ már hatjegyű, viszont az $5^2\cdot 7^2=1225$ csak négyjegyű, így két lehetőség maradt:

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 9 \cdot 1225 = 11025 \text{ vagy a } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 4 \cdot 11025 = 44100.$$

Mindkettő megfelel a feladat feltételeinek, így a keresett szám ezek egyike.

31. *A p és $p+2$ prímek $(p>3)$. Határozd meg $p+4$ egyik valódi osztóját.*

(Varga Tamás verseny, megyei forduló, 7. osztály II. kategória, 1995.)

Megoldás:

A p, $p+1$, $p+2$ három egymást követő egész szám, ezért az egyikük osztható 3-mal. A feltételek miatt ez csak a $p+1$ lehet. De ekkor a $p+4=(p+1)+3$ összeg mindkét tagja osztható 3-mal, ezért az egyik valódi osztója a 3.

32. *Mely p és r pozitív prímszámokra lesz $p^r + r^p$ összeg is prím?*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 8. osztály I. kategória, 1995.)

Megoldás:

A két prímszám mindegyike nem lehet páratlan, mert akkor $p^r + r^p$ kettőnél nagyobb páros szám lenne, tehát nem lenne prím. Tehát az egyik prím a 2. A $p^r + r^p$ kifejezés *p*-ben és *r*-ben szimmetrikus, ezért legyen $r=2$. Ekkor a $p^2 + 2^p$ kifejezésnek kell prímnek lenni.
$p=3$ megoldás, hiszen $9+8=17$ prím. Megmutatjuk, hogy ha $p>3$, akkor nem lehet prím a p^2+2^p kifejezés. Ismert, hogy a 3-mal nem osztható négyzetszám 3-as maradéka 1. Ezek után a 2^p kifejezés 3-as maradékát kell meghatározni páratlan, 3-nál nagyobb *p*-re.

$$2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 4^k = 2 \cdot (3+1)^k .$$

Tudjuk, hogy ha két olyan számot összeszorzunk, melyek 3-as maradéka 1, akkor a szorzat is 1-et ad maradékul 3-mal osztva.

Ugyanis
$$\left(3a+1\right)\left(3b+1\right)=9ab+3a+3b+1=3\left(3ab+a+b\right)+1,$$

ahol a és b egész számok. Mivel a hatványozás ismételt szorzás, ezért a $\left(3+1\right)^k$ kifejezés 3-as maradéka 1, azaz $\left(3+1\right)^k=3m+1$ így

$$2\cdot\left(3+1\right)^k=2\cdot\left(3m+1\right)=6m+2,$$

azaz a 3-as maradéka 2. Ezért $2^p=2^{2k+1}$ kifejezés 3-as maradéka 2, így p^2+2^p hármas maradéka $1+2=3$, azaz a kifejezés 3-nál nagyobb, 3-mal osztható szám, tehát nem prím.
A feladat egyetlen megoldása $p=3$, $r=2$.

33. *Melyek azok a p, q, pozitív prímek, amelyekre* $p\cdot q-1$ és $p\cdot q+1$ *is prím?*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 7. osztály I. kategória, 1997.)

Megoldás:

A két prímszám mindegyike nem lehet páratlan, mert akkor két szomszédos páros prímszám lenne, ami nincs. Ezért legyen $p=2$. Ekkor a prímszámaink: $2q-1$ és $2q+1$.
A $2q-1,\ 2q,\ 2q+1$ három egymást követő egész szám, az egyikük osztható 3-mal. Ez a $2q+1$ nem lehet, mert a prím volta miatt $2q+1=3$ esetén q nem lenne prím.
Ha $2q-1=3$, akkor $q=2$ adódik, ami megoldás, hiszen $2\cdot2-1=3$, $2\cdot2+1=5$ számok prímek.
Ha $2q$ osztható 3-mal, akkor $q=3$ adódik, és a $2\cdot3-1=5,\ 2\cdot3+1=7$ szintén megoldás.
A feladatnak tehát két megoldása van: $p=q=2,$ vagy $p=2,\ q=3$.

34. *Egy háromjegyű prímszámot a kétszerese után írtuk. Hány osztója van az így nyert hat-, vagy hétjegyű számnak?*

(Varga Tamás verseny, országos döntő, 8. osztály II. kategória, 2001.)

Megoldás:

Jelölje p a háromjegyű prímszámot. Ha $2p$ után írjuk a p-t, akkor a következő alaki értékű számot kapjuk: $\overline{2p\,p}$.
Ekkor a felírt szám:

$$\overline{2p\,p} = \overline{2p000} + p = 2p \cdot 1000 + p = 2001p\,.$$

Ennek a számnak az osztóit keressük, ehhez a prímtényezős felbontás ad segítséget. $2001p = 3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot p$, ahol a p a többitől különböző prím.
Az osztók száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.