Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek

Az alábbi cikk a 2010. évi Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott előadásom alapján készült. Immár 18 éve tanítok a szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium matematika tagozatán. A tagozatunk főfeladata a tehetséggondozás, a matematika versenyekre történő felkészítés. Ennek nagyon fontos részét képezi, hogy olyan módszereket, ötleteket, fogásokat adjunk át a diákoknak, melyeket hatékonyan tudnak használni a munkájuk során. Ezeket mi is hosszú évek alatt sajátítottuk el sok tanulással, feladatmegoldással. A mi felelősségünk többek között abban áll, hogy az általunk közreadott megoldások precízek legyenek, a felhasznált tételeket pontosan fogalmazzuk meg, hogy azok alkalmazása nehogy hibás, vagy hiányos megoldásra vezessen. Ennek kapcsán szeretnék szólni az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, melyekkel jó néhányszor találkozhattunk már matematika versenyeken.
Az első két feladat is versenyfeladat volt. Az itt közölt megoldásuk szó szerint az úgynevezett hivatalos megoldás. Ezekben kiemeltem azokat a részeket, melyekkel a cikk során részletesen foglalkozom.

1. **feladat:**

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6\dfrac{x^2+1}{x^2+11} = \sqrt{\dfrac{11x-6}{6-x}}$ egyenletet!

(KöMaL F. 2830., NMMV 2003., KöMaL B. 4027.)

Megoldás: (NMMV 2003. hivatalos megoldása)

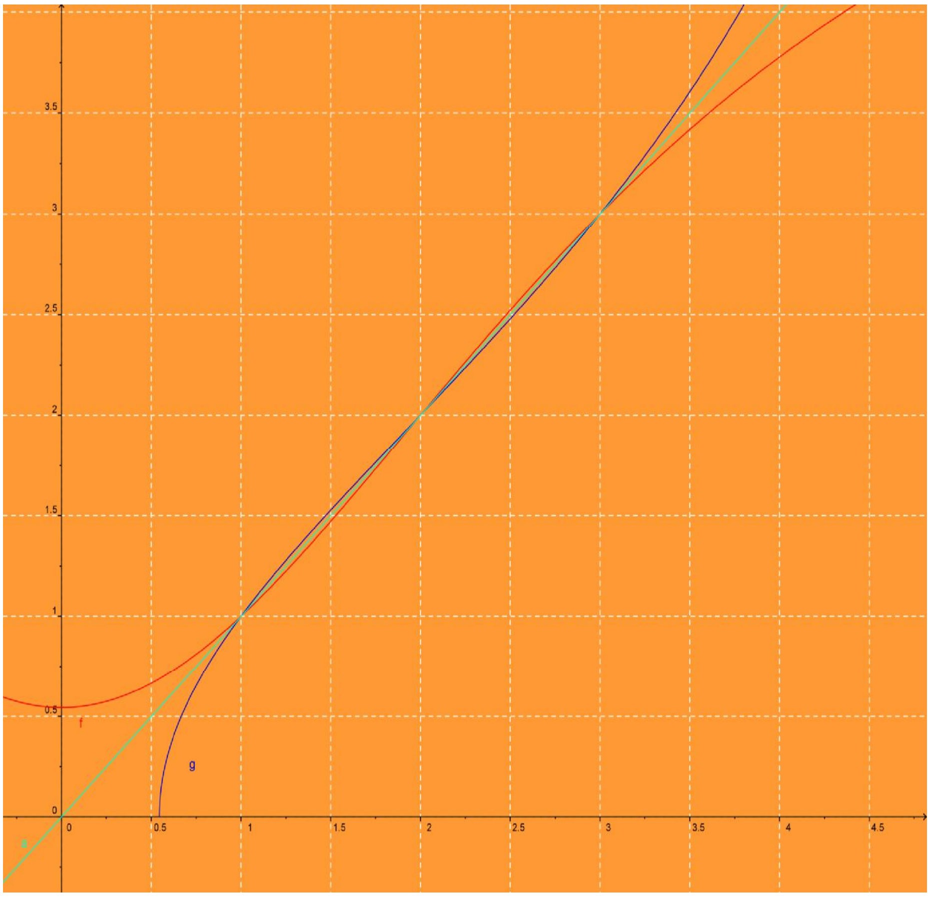
- Nézzük a jobboldali függvényt, ennek egyenlete: $y = \sqrt{\dfrac{11x-6}{6-x}}$
- Ezt x-re rendezve $x = 6\dfrac{y^2+1}{y^2+11}$ adódik.
- Látható tehát, ha az egyik oldalt az x függvényének tekintjük, akkor a másik oldal az előbbi inverz függvénye.
- A két függvény képe egymás tükörképe az y=x egyenesre nézve, ezért metszéspontjaik az y=x egyenesen vannak.
- Így elegendő az $x = \dfrac{6(x^2+1)}{x^2+11}$ egyenletet megoldani.
- A rendezés utáni $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ egyenlet baloldalának szorzatalakja (x-1) (x-2) (x-3)=0.
- Ez alapján az egyenlet megoldásai az 1, 2, 3 számok. Melyek igazzá is teszik az eredeti egyenlőséget.

**

Ezzel a hivatalos megoldás végére értünk.

A lelkiismeretünk megnyugtatása végett ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=6\dfrac{x^2+1}{x^2+11}$ és a

$g:\left[\dfrac{6}{11};6\right[\to\mathbb{R};\ g(x)=\sqrt{\dfrac{11x-6}{6-x}}$ függvényt!



Az ábra alapján az alábbi megállapításokat tehetjük:

- A két függvény grafikonja az y=x egyenesen metszi egymást, tehát a megoldás ezen része látszólag rendben van.
- A figyelmes szemlélő számára látható az *f* függvény grafikonján, hogy a függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Erre az alapján is felfigyelhetünk, hogy az *f* függvény páros, hisz minden $x\in D_f$ esetén $-x\in D_f$ is teljesül és $f(-x)=6\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2+11}=6\dfrac{x^2+1}{x^2+11}=f(x)$.

Tehát kézenfekvő az alábbi kérdés.
Korrekt volt az inverz kapcsolat említése?
Mielőtt a kérdéssel behatóbban foglalkoznánk, nézzünk meg egy másik versenyfeladatot, melyet 2003-ban tűzték ki a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen!

2. feladat:

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\log_3(2^x+5)=\log_2(3^x-5)$ egyenletet! (NMMV 2003.)
(A hivatalos megoldás az alábbi volt.)

Megoldás:

- Vizsgáljuk az alábbi két függvényt!

$$f:\mathbb{R}\to\,]\log_3 5;\infty[\,;\ f(x)=\log_3\left(2^x+5\right)$$

$$g:\,]\log_3 5;\infty[\,\to\mathbb{R};\ g(x)=\log_2\left(3^x-5\right)$$

- **Mivel a két függvény egymás inverze, ezért a grafikonjuk az y=x egyenesre nézve szimmetrikus, így grafikonjaik csak ezen az egyenesen metszhetik egymást.**
- Ezért az egyenletnek csak olyan *x* szám a megoldása, melyre $\log_3(2^x+5)=x=\log_2(3^x-5)$ vagyis $2^x+5=3^x$. Ebből az $5=3^x-2^x$ egyenlethez jutunk, aminek csak a pozitív számok halmazán lehet megoldása, hisz a nempozitív számok halmazán a jobb oldali kifejezés első tagja nem nagyobb a második tagjánál.
- Az *x*=2 megoldás, több megoldás pedig azért nincs, **mert a** 3^x-2^x **függvény a pozitív számok halmazán szigorúan monoton növekvő.**

**

Érdemes megjegyezni, hogy utolsó megállapítás mindenképpen bizonyítást igényel. Az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};x\mapsto 3^x$ és a $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};x\mapsto 2^x$ függvény is szigorúan monoton növekvő, és két szigorúan monoton növekvő függvény különbsége nem feltétlenül szigorúan monoton növekvő.

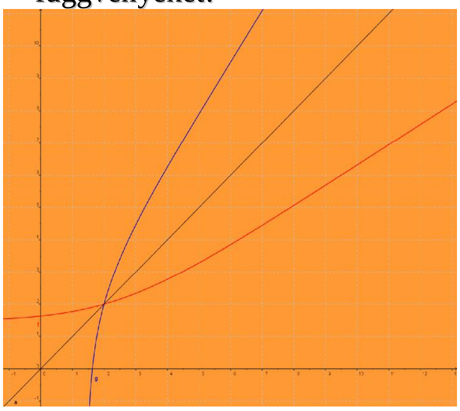
Ebben az esetben viszont igen, hiszen $3^x-2^x=2^x\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right]$, valamint minden $x\in\mathbb{R}^+$ esetén $2^x>0$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x-1>0$ és mindkét tényező szigorúan monoton növekvő.

Ábrázoljuk az

$$f:\mathbb{R}\to\,]\log_3 5;\infty[\,;\ f(x)=\log_3\left(2^x+5\right)$$

$$g:\,]\log_3 5;\infty[\,\to\mathbb{R};\ g(x)=\log_2\left(3^x-5\right)$$

függvényeket!



A grafikon újfent megerősíteni látszik azt a gondolatot, mely szerint, **ha egy invertálható függvény és inverzének a grafikonja metszi egymást, akkor a metszéspontnak az $y=x$ egyenesen kell lennie.**
A továbbiakban alkalmazzuk a hivatalos megoldásokban látott gondolatmeneteket, módszereket!

3.feladat:
Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait!

$$\sqrt{2x+6}=\frac{x^2-6}{2}$$

(Alkalmazzuk szó szerint az 1. feladatra közölt hivatalos megoldást!)

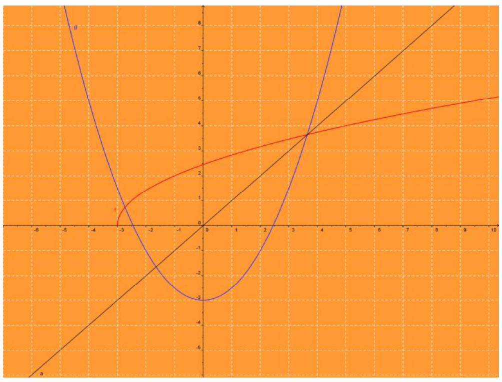
Megoldás:

- Nézzük a baloldali függvényt, ennek egyenlete: $y=\sqrt{2x+6}$
- Ezt x-re rendezve $x=\frac{y^2-6}{2}$ adódik.
- Látható tehát, hogy ha az egyik oldalt az x függvényének tekintjük, akkor a másik oldal az előbbi inverz függvénye.
- A két függvény képe egymás tükörképe az $y=x$ egyenesre nézve, ezért metszéspontjaik az $y=x$ egyenesen vannak.
- Így elegendő az $x=\frac{x^2-6}{2}$ egyenletet megoldani.

  Ennek megoldásai: $x_1=1+\sqrt{7}$; $x_2=1-\sqrt{7}$
- Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy a második szám nem megoldása az egyenletnek, mert a baloldal pozitív, a jobboldal negatív értékű. Az első viszont kielégíti az egyenletet.

**

Nyugtassuk meg a lelkiismeretünket és ábrázoljuk az $f:[-3;\infty[\to\mathbb{R};\ f(x)=\sqrt{2x+6}$, valamint a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ g(x)=\frac{x^2-6}{2}$ függvényt!



A grafikonok két pontban metszik egymást. Eszerint az egyenletnek két valós megoldása van, szemben azzal, amit előző megoldásban kaptunk.

Hol a hiba a korábbi gondolatmenetben? Miért veszítettünk megoldást az előző feladatban?

- Az egyik hibát ott követtük el, hogy az inverz kapcsolat vizsgálata esetén csak formális algebrai átalakításokat végeztünk és nem foglalkoztunk az e mögött rejlő matematikai tartalommal.

Adjuk meg a feladathoz kapcsolódó két kölcsönösen egyértelmű függvényt, melyek egymás inverzei. Ezek az $f:[-3;\infty[\to\mathbb{R}_0^+;\ x\mapsto\sqrt{2x+6}$ és a $g:\mathbb{R}_0^+\to[-3;\infty[;\ x\mapsto\frac{x^2-6}{2}$

függvények. Ha az egyenletet a $D_f \cap D_g = \mathbb{R}_0^+$ halmazon oldjuk meg, akkor az egyetlen megoldás tényleg az $x_1 = 1+\sqrt{7}$ szám. De a $\sqrt{2x+6} = \frac{x^2-6}{2}$ egyenlet értelmezési tartománya nem az $\mathbb{R}_0^+$, hanem a $\left[-3;-\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6};\infty\right[$ halmaz. Ezen a halmazon viszont két megoldása van. Adjunk a feladatra korrekt megoldást!

1. megoldás:

A $\left[-3;-\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6};\infty\right[$ halmazon az egyenlet mindkét oldala nemnegatív értékű, így négyzetre emeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk. Végezzük el a négyzetre emelést és redukáljunk nullára!

$x^4 - 12x^2 - 8x + 12 = 0$

Mivel az *f* és *g* függvény grafikonja az *y=x* egyenesen metszi egymást, ezért az $x = \frac{x^2-6}{2}$ egyenlet megoldásai gyökei lehetnek az előző negyedfokú egyenletnek is.

Így azt várjuk, hogy $(x^2 - 2x - 6) \mid (x^4 - 12x^2 - 8x + 12)$.

A polinomosztást elvégezve kapjuk, hogy $x^4 - 12x^2 - 8x - 12 = (x^2 - 2x - 6)(x^2 + 2x - 2)$. Így az eredeti egyenlet megoldásai, az $x^2 - 2x - 6 = 0$ és az $x^2 + 2x - 2 = 0$ másodfokú egyenletek megoldásai közül kerülnek ki, melyek az $1+\sqrt{7};\ 1-\sqrt{7};\ -1+\sqrt{3};\ -1-\sqrt{3}$ számok.

Ezek közül az értelmezési tartománynak csak az $1+\sqrt{7};\quad -1-\sqrt{3}$ számok az elemei.

2. megoldás:

A $\left[-3;-\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6};\infty\right[$ halmazon keressük az $y = \sqrt{2x+6}$ és az $y = \frac{x^2-6}{2}$ egyenletű görbék metszéspontjainak első koordinátáját. Emeljük négyzetre az első egyenletet, majd adjuk hozzá a második kétszeresét! Ekkor az $y^2 + 2y = x^2 + 2x$ kétismeretlenes egyenlethez jutunk, melyet könnyen szorzattá alakíthatunk: $(y-x)(y+x+2) = 0$. Ebből kapjuk, hogy *y=x* vagy *y=-x-2*.

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe az $x = \frac{x^2-6}{2}$ és a $-x-2 = \frac{x^2-6}{2}$ egyenletekhez jutunk. Innen pedig megkaphatjuk megoldásokat.

**

Könnyen gyárthatunk az előzőhöz hasonló egyenleteket! Az alábbiakban oldjunk meg még egy ilyen típusút!

4. feladat:

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{2-x} = 2 - x^3$ egyenletet!

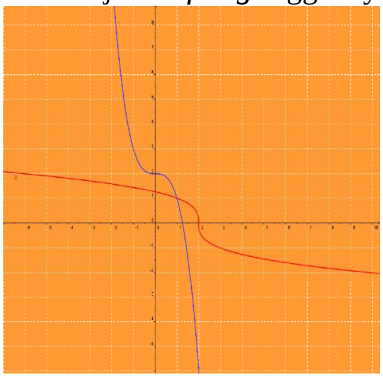
Megoldás:

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 2 - x^3$ függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű, így létezik inverze. Könnyen látható, hogy ez a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x) = \sqrt[3]{2-x}$ függvény, hisz $D_g = R_f$, $R_g = D_f$ valamint

$f\left(g\left(x\right)\right)=2-\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3=2-(2-x)=x$. Az eddig jól működő gondolatmenet alapján az ***f* és *g* függvény grafikonja csak az y=x egyenesen metszheti egymást**, így a $2-x^3=x$ egyenlethez jutunk. Ezt átrendezve és szorzattá alakítva kapjuk az $(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$ egyenletet, melynek csak az *x*=1 a megoldása.

**

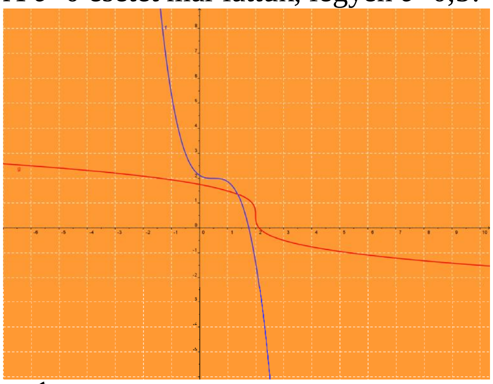
Ábrázoljuk az *f* és *g* függvényeket!



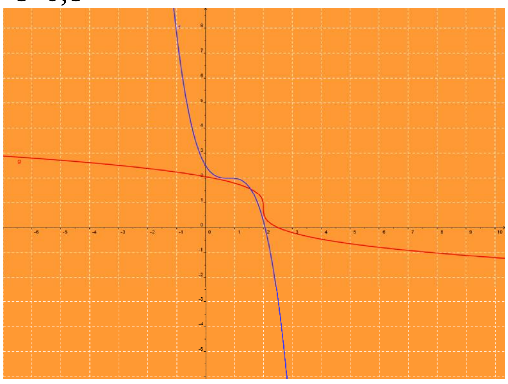
Úgy tűnik, a grafikon továbbra is igazolja a megoldásban alkalmazott gondolatmenetet.

Az előző feladatban szereplő *f* függvényből kiindulva foglalkozzunk az $f_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R};x\mapsto 2-(x-c)^3$ függvénnyel, ahol *c* nemnegatív valós paraméter! Mivel f_c bármely *c* esetén kölcsönösen egyértelmű, ezért létezik inverze.
Adjuk meg ezt az inverz függvényt!
Fejezzük ki az $y=2-(x-c)^3$ egyenletből az *x*-et! Ekkor az $x=c+\sqrt[3]{2-y}$ egyenlethez jutunk. Ha felcseréljük x-et és y-t, akkor megkapjuk f_c függvény inverzének hozzárendelési szabályát. Tehát f_c inverze az $f_c^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R};x\mapsto c+\sqrt[3]{2-x}$ függvény.
Ábrázoljuk néhány *c* érték esetén az f_c függvényt és inverzét!

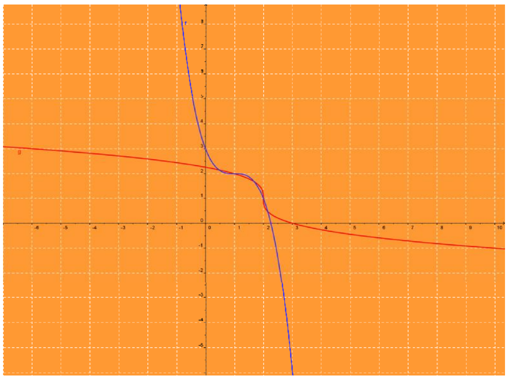
A *c*=0 esetet már láttuk, legyen *c*=0,5!



c=0,8



c=1



A grafikon alapján kijelenthetjük, hogy az $(1-x)^3+2=1+\sqrt[3]{2-x}$ egyenletnek öt valós megoldása van, melyek közül négyhez tartozó metszéspont nincs rajta az $y=x$ egyenesen.

Tehát hibás az az állítás, hogy ha egy invertálható függvény és inverzének a képe metszi egymást, akkor a metszéspont az $y=x$ egyenesen van!

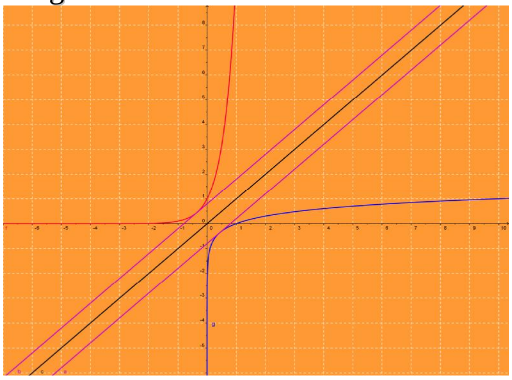
Oldjuk meg az előző egyenletet!
Megoldás:
Legyen $y=1-x$! Ekkor az $y^3+1=\sqrt[3]{1+y}$ egyenletet kapjuk, melyet köbre emelve és rendezve az $y^9+3y^6+3y^3-y=0$ egyenlethez jutunk. Ennek az $y=0$, így az eredetinek az $x=1$ megoldása, ahogy azt a grafikonról is leolvashattuk. Az y kiemelésével kapott $y^8+3y^5+3y^2-1$ nyolcadfokú polinomnak az $y=-1$ gyöke, hisz az együtthatók váltakozó előjelű összege 0 (a hiányzó tagok együtthatója 0 és ezt figyelembe kell venni). Ebből kapjuk az eredeti egyenlet grafikonról is leolvasható másik egész gyökét, az $x=2$-t.
Az előzőek alapján $(y+1)\mid(y^8+3y^5+3y^2-1)$, a hányadospolinomot a Horner-féle elrendezés ([3.] 284. oldal) segítségével könnyedén meghatározhatjuk. Így kapjuk, hogy
$y^8+3y^5+3y^2-1=(y+1)(y^7-y^6+y^5+2y^4-2y^3+2y^2+y-1)$
Mivel a két grafikon metszi egymást az $y=x$ egyenesen, ezért az $x=(1-x)^3+2$ egyenlet valós gyöke, megoldása az eredeti egyenletnek is. Áttérve y-ra azt kapjuk, hogy az $y^3+y+1=0$ egyenlet valós megoldása, gyöke a $y^7-y^6+y^5+2y^4-2y^3+2y^2+y-1$ hetedfokú polinomnak is. Ez alapján azt várjuk, hogy $(y^3+y+1)\mid(y^7-y^6+y^5+2y^4-2y^3+2y^2+y-1)$, ami teljesül is, mint arról polinomosztással meggyőződhetünk, hisz y^4-y^3+2y-1 a hányadospolinom.
Tehát a feladatot visszavezettük az $y^3+y+1=0$ és az $y^4-y^3+2y-1=0$ egyenletek megoldására. Ebből meghatározhatjuk a még hiányzó három valós gyököt. (Lásd [3.] 321-332. oldal!)

**

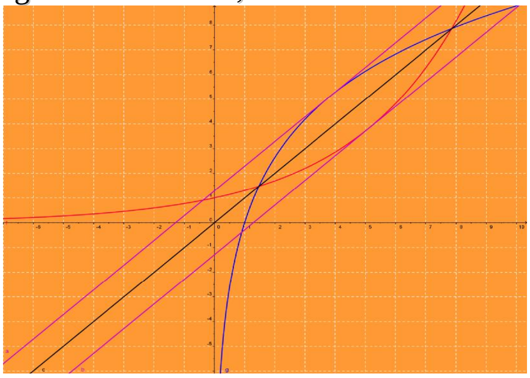
A továbbiakban foglalkozzunk a középiskolából jól ismert klasszikus inverz kapcsolattal!

5. feladat:
Mely egytől különböző pozitív valós a esetén van legalább egy valós megoldása az $a^x=\log_a x$ egyenletnek?
Megoldás:
Látható, hogy a feladat ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy mely egytől különböző pozitív valós a esetén van legalább egy közös pontja az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+;\ x\mapsto a^x$ és a $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\ x\mapsto\log_a x$ függvény grafikonjának.
Az eddigiek alapján csak annyit állíthatunk, hogy ha van közös pontjuk, akkor azok között biztosan található olyan, amelyik eleme az $y=x$ egyenesnek, hisz az f és g függvény folytonos az értelmezési tartományán.
Az eddigi ismereteink alapján az nyilván való, hogy ha $0<a<1$, akkor a két grafikon metszi egymást.
Legyen $a>1$!
Ábrázoljuk $a=10$ illetve $a=1{,}3$ esetén a függvényeket!

Az $y=x$ egyenes elválasztja a két grafikont $a=10$ esetén.



Az y=x egyenes belemetsz a grafikonokba $a=1,3$ esetén.



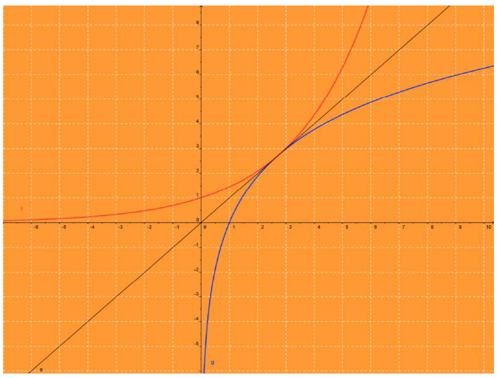
Mivel a g függvény szigorúan konkáv, a következőt állíthatjuk.

Az f és g függvény grafikonjának $a>1$ esetén akkor és csak akkor van közös pontja, ha a g grafikonjának az $y=x$ egyenessel párhuzamos érintője az y tengelyt a nemnegatív tartományban metszi.

Határozzuk meg az érintő egyenletét!

Mivel az érintő meredeksége 1 és $g`(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$, ezért az érintési pont x koordinátája $x=\frac{1}{\ln a}$.

Tehát az érintési pont az $E\left(\frac{1}{\ln a};\log_a\frac{1}{\ln a}\right)$ pont. Az y koordinátából látszik, hogy ez a pont csak $a>1$ esetén létezik. Az érintő egyenlete: $y=x-\frac{1}{\ln a}+\log_a\frac{1}{\ln a}$. Az f és g grafikonjának akkor és csak akkor van közös pontja, ha $\frac{1}{\ln a}\le\log_a\frac{1}{\ln a}=-\log_a\ln a=-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$. Ezt végigszorozva a negatív $-\ln a$-val a $1\ge\ln(\ln a)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Használjuk fel, hogy $e>1$!



**

$$a=e^{\frac{1}{e}}$$

$$1\ge\ln(\ln a)$$

c

$$\frac{1}{e}\ge\ln a$$

c

$$e^{\frac{1}{e}}\ge a$$

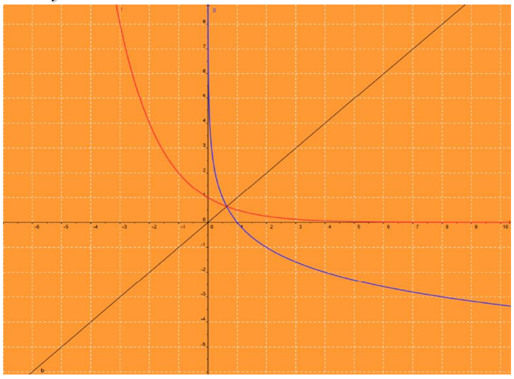
Tehát a vizsgált paraméteres egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $0<a<1$ vagy $1<a\le e^{\frac{1}{e}}$.

Az előző feladat után kézenfekvő az alábbi kérdés.

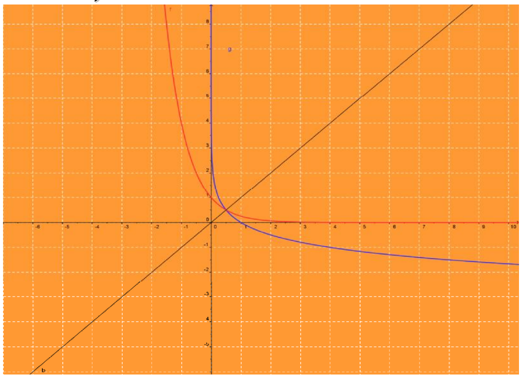
6. feladat:
Az 5. feladatban szereplő egyenletnek az ***a*** paraméter mely értékeinél van 1, illetve 2 valós megoldása? Van-e olyan ***a*** érték, amely esetén az egyenletnek kettőnél több valós megoldása van?

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, akkor az egyenletnek két megoldása van, ha $a = e^{\frac{1}{e}}$, akkor egy. Vizsgáljuk meg a 0<*a*<1 esetet! Készítsünk néhány ábrát!

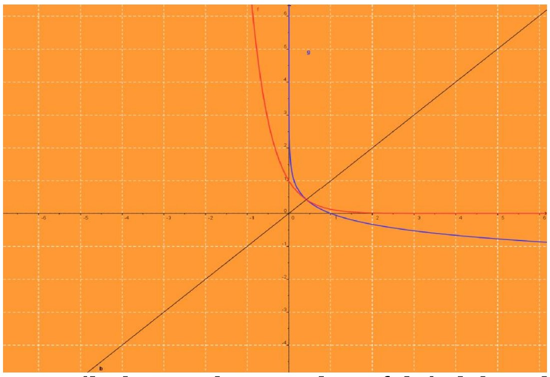
a=0,5



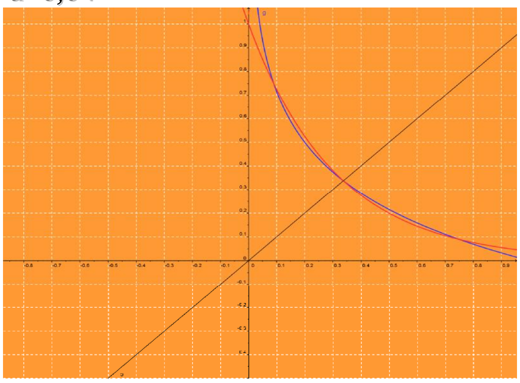
a=0,25



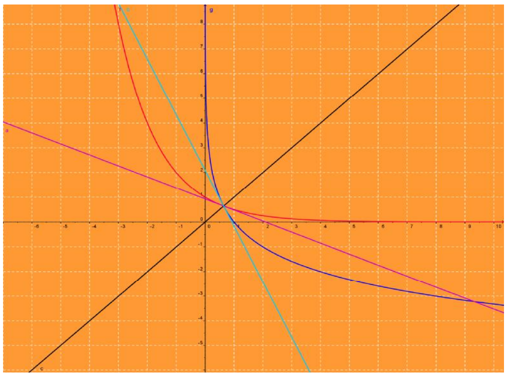
a=0,125



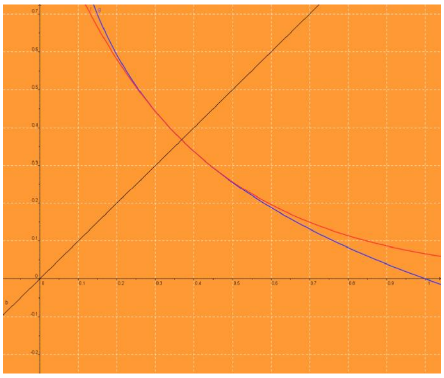
a=0,04



Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett van három metszéspontja a két görbének! Húzzuk be mindkét görbe érintőjét az y=x egyenesre eső P(x_0 ; x_0) pontba!



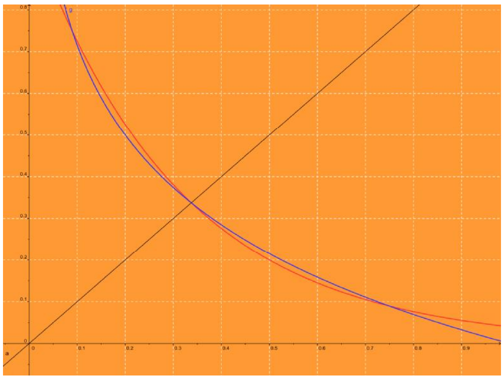
Lehet-e olyan eset, hogy a két görbe érintője megegyezik?
Mivel a két görbe egymás tükörképe az *y*=*x* egyenesre nézve, ezért a *P* pontba húzott érintőik is egymás tükörképei erre az egyenesre nézve. Tehát a két érintő csak úgy eshet egybe, ha merőleges az *y*=*x* egyenesre, így iránytangense -1, azaz irányszöge -45°.
Használjuk fel, hogy $a^{x_0} = x_0$ és az exponenciális függvény deriváltja az x_0 pontban -1, tehát



$a^{x_0} \cdot \ln a = -1$. Így $a = \left(\frac{1}{e}\right)^e$.

$$a = \left(\frac{1}{e}\right)^e$$

Ha $\left(\frac{1}{e}\right)^e < a < 1$, akkor az exponenciális függvény P(x_0 ; x_0) pontjába húzott érintőjének a meredeksége negatív, de nagyobb -1-nél. Így a P pontba húzott érintő irányszögének abszolút értéke kisebb 45°-nál, a logaritmus függvényé nagyobb. Ezért az x_0-nak van olyan jobboldali környezete, amelybe eső x-ek esetén a logaritmus függvény grafikonja az exponenciális függvényhez húzott érintő alatt halad, míg az exponenciális függvény grafikonja az érintő fölött. Az *a<1* alapú logaritmus függvény $x_0 < x$ abszcisszájú pontjaiba húzott érintőinek a meredeksége kisebb, mint az inverze ugyanilyen abszcisszájú pontjába húzott érintőjének meredeksége. Így a két grafikon csak a P pontban metszi egymást.



Ha $0 < a < \left(\frac{1}{e}\right)^e$, akkor az exponenciális függvény *P*-beli érintőjének az irányszöge a nagyobb abszolút értékű. Így a *P* abszcisszájának van olyan baloldali környezete, ahol a logaritmus függvény grafikonja az exponenciális függvény grafikonja alatt halad (lásd az alábbi ábrát). Valahol viszont bele kell metszenie, mert az exponenciális függvény grafikonja metszi az y tengelyt, a logaritmus függvényé nem. Több metszéspont pedig nem jön létre, mert a tengelyek elválasztják a grafikonokat.

Összegzés

Az $a^x = \log_a x$ (0<*a*, $a \neq 1$) egyenletnek:

- nincs valós megoldása, ha $e^{\frac{1}{e}} < a$
- egy valós megoldása van, ha $a = e^{\frac{1}{e}}$ vagy $\left(\frac{1}{e}\right)^e \le a < 1$
- két valós megoldása van, ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$

- három valós megoldása van, ha $0 < a < \left(\frac{1}{e}\right)^e$

**

Térjünk vissza az 1., majd a 2. feladatra! Először adjunk az 1.-re egy olyan megoldást, amely elkerüli a két oldal közötti inverz kapcsolat felhasználását!

1. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a $6\frac{x^2+1}{x^2+11}=\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$ egyenletet!

Megoldás: (Ezzel a megoldással lényegében azonos a B. 4027-es feladatra adott, KöMaL honlapon szereplő megoldás.)

Az egyenlet értelmezési tartománya $\left[\frac{6}{11};6\right[$ intervallum. Emeljük négyzetre az egyenletet, majd redukáljunk nullára. Ekkor a $47x^5-222x^4+314x^3-564x^2+1367x-942=0$ egyenlethez jutunk. Mivel az együtthatók összege 0, ezért az x=1 gyöke az egyenletnek, tehát $(x-1)\,|\,\left(47x^5-222x^4+314x^3-564x^2+1367x-942\right)$.

Horner-elrendezéssel meghatározhatjuk a hányadost, amely a $47x^4-175x^3+139x^2-425x+942$ polinom. Ha ennek van egész gyöke, akkor az csak a konstans tag osztói közül kerülhet ki. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az x= 2 gyök. Így $(x-2)\,|\,\left(47x^4-175x^3+139x^2-425x+942\right)$ a hányados megint meghatározható Horner-elrendezéssel, amely a $47x^3-81x^2-23x-471$ polinom. Ennek az x=3 gyöke, így osztható x-3-mal. A hányados a $47x^2+60x+157$ melynek nincs valós gyöke, mert a diszkriminánsa negatív. Tehát az egyenlet megoldásai az 1, 2, 3 számok.

**

A 2. feladat kapcsán, az ábra alapján már meggyőződtünk arról, hogy az

$f:\mathbb{R}\to\,]\log_3 5;\infty[\,;\ f(x)=\log_3\left(2^x+5\right)$

$g:\,]\log_3 5;\infty[\,\to\mathbb{R};\ g(x)=\log_2\left(3^x-5\right)$

függvények grafikonja csak az y=x egyenesen metszi egymást. Ezt most bizonyítsuk is be!

Azt már bebizonyítottuk, hogy az

$f:\mathbb{R}\to\,]\log_3 5;\infty[\,;\ f(x)=\log_3\left(2^x+5\right)$

$g:\,]\log_3 5;\infty[\,\to\mathbb{R};\ g(x)=\log_2\left(3^x-5\right)$

függvények grafikonjának az y=x egyenesen csak az x=2 helyen van metszéspontja, mert a $\log_3(2^x+5)=x=\log_2(3^x-5)$ egyenletnek csak az x=2 a megoldása.

Bizonyítsuk be, hogy az f függvény az értelmezési tartományán szigorúan konvex, a g pedig szigorúan konkáv!

Az f első deriváltja $f'(x)=\left(\log_3(2^x+5)\right)'=\frac{\ln 2\cdot 2^x}{\ln 3\cdot(2^x+5)}$, ez alapján a második derivált

$f''(x)=\left(\frac{\ln 2\cdot 2^x}{\ln 3\cdot(2^x+5)}\right)'=\frac{\ln^2 2\cdot 2^x}{\ln 3}\frac{5}{(2^x+5)^2}$, ami bármely valós x esetén pozitív, tehát f

szigorúan konvex függvény. A g függvény első deriváltja $g'(x)=\left(\log_2(3^x-5)\right)'=\dfrac{\ln 3\cdot 3^x}{\ln 2\cdot(3^x-5)}$.

A második deriváltja $g''(x)=\left(\dfrac{\ln 3\cdot 3^x}{\ln 2\cdot(3^x-5)}\right)'=\dfrac{\ln^2 3\cdot 3^x}{\ln 2}\dfrac{-5}{(3^x-5)^2}$ ami a g értelmezési tartományának bármely x értékére negatív, így a g az értelmezési tartományán szigorúan konkáv. Az eddigiekből következik, hogy a 2-nél kisebb helyeken az f függvény grafikonjának minden pontja az $y=x$ egyenes felett, a g függvényé pedig az alatt helyezkedik el, tehát itt nem metszhetik egymást, míg a 2-nél nagyobb helyeken fordított a helyzet, így ott sem metszhetik egymást. Ezzel igazoltuk, hogy a két grafikonnak csak az $x=2$ helyen van közös pontja.

**

Konklúzió:

§ Nagyon fontos, hogy két függvény közötti inverz kapcsolat bizonyítása ne csak formális algebrai átalakítás legyen, hanem ennél mélyebb megfontolás!

§ Az $f^{-1}(x)=f(x)$ típusú egyenleteknél akkor és csak akkor hivatkozhatunk arra, hogy a függvény és inverzének a grafikonja csak az $y=x$ egyenesen metszi egymást, ha ezt az adott egyenlet kapcsán bizonyítottuk.

Létezik-e olyan tétel, amely segítséget nyújt a bizonyításhoz?
Mielőtt erre rátérnénk, oldjuk meg az alábbi feladatot!

7. **feldata:** Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sqrt[3]{4x-3}=\frac{x^3+3}{4}$$

Megoldás: Az könnyen látható, hogy ez az egyenlet is az $f^{-1}(x)=f(x)$ típusú egyenletek közé tartozik, hisz az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\sqrt[3]{4x-3}$ és a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto\dfrac{x^3+3}{4}$ függvények egymás inverzei, ahol mindkét függvény szigorúan monoton növekvő. Átrendezés után az eredetivel ekvivalens $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{4x-3}-3}=x$ egyenletet kapjuk, mely az f függvénnyel kifejezve a következő alakban írható fel : $f(f(x))=x$.
Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy mivel az f függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az $f(f(x))=x$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x)=x$ egyenlet megoldás halmazával.
Legyen z megoldása az $f(x)=x$ egyenletnek! Ekkor $f(z)=z$, így $f(f(z))=f(z)$, tehát $f(f(z))=z$.
Legyen r megoldása az $f(f(x))=x$ egyenletnek, azaz teljesül, hogy $f(f(r))=r$! Tegyük fel, hogy $r<f(r)$! Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, ezért $f(r)<f(f(r))$, tehát $r<f(r)<f(f(r))$, ami ellentmondás. Hasonlóan be lehet látni, hogy $f(r)<r$ nem lehetséges, tehát szükségképpen $r=f(r)$. Így a két egyenlet megoldáshalmaza egyenlő.
Tehát az eredeti egyenlet ekvivalens az $\sqrt[3]{4x-3}=x$ egyenlettel. Köbre emelés és átrendezés után az $x^3-4x+3=0$. Ennek a megoldásai az eddig alkalmazott módszerek felhasználásával már könnyen meghatározhatók, melyek az 1, $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ számok.

**

A feladatnak két nagyon fontos hozadéka a következő.

1. hozadék:

Adott az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet, ahol $f: D_f \to R_f$; x **a** $f(x)$ szigorúan monoton növekvő függvény. Ebből következik, hogy $f^{-1}(x)$ is szigorúan monoton növekvő. (Lásd [1.] 151. oldal!)
Az egyenlet két oldalára alkalmazva a szigorúan monoton *f* függvényt kapjuk, hogy

$$f(f^{-1}(x)) = f(f(x))$$

c

$$x = f(f(x))$$

Azt pedig az előbb beláttuk, hogy az utolsó egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x)=x$ egyenlet megoldáshalmazával, mivel *f* szigorúan monoton növekvő. Így az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x)=x$ egyenlet megoldáshalmazával, ha *f* szigorúan monoton növekvő. Így megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

Tétel:

Ha az $f: D_f \to R_f$; x **a** $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, akkor a $D_f \cap R_f$ halmazon az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az *f(x)=x* egyenlet megoldáshalmazával.

Megjegyzés: Az 1. és a 2. feladatra adott első megoldást úgy tehetjük teljesen korrekté, ha belátjuk, hogy az inverz kapcsolatban szereplő függvények szigorúan monoton növekvők. Ezt az olvasóra bízzuk.

2. hozadék

§ Ha az $f: D_f \to R_f$; x **a** $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, akkor az *(f(…(f(x))…))=x* egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az *f(x)=x* egyenlet megoldáshalmazával.

Végül nézzünk néhány feladatot, melynek megoldását az olvasóra bízzuk!

Oldjuk meg a valós számok halmazán!

1. $\sqrt{x+5}=x^2-5$
2. $\sqrt{2x+7}=\dfrac{x^2-7}{2}$
3. $x^2+6x+7=\sqrt{x+5}$
4. $(2+x)^{\log_2 3}-(3+x)^{\log_3 2}=1 \quad x\in\,]-2;\infty[$ (*Dan Negulescu*, *Matematikai Olimpia*, *Braila* 2001.)
5. $\left(3^{\frac{x}{4}}-1\right)^2=\log_{\sqrt[4]{3}}\left(\sqrt{x}+1\right)$
6. $\left(x^3-6\right)^3=6+\sqrt[3]{x+6}$
7. $x=\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4x}}}$

Külön köszönettel tartozom Dr. Katz Sándornak, aki értékes tanácsaival segítette munkámat.

Felhasznált irodalom

[1.] Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I. (Nemzetei Tankönyvkiadó 2006.)
[2.]Szele Tibor: Bevezetés az algebrába (Tankönyvkiadó 1972.)
[3.]Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet (Tankönyvkiadó)
[4.]Olosz Ferenc: Egyenletek megoldása inverz függvények felhasználásával
[3.]Szilassi Lajos: A kételkedés joga – és kötelessége
[4.]KöMaL (1893-2010)
[5.]NMMV feladatok és megoldások 1992-2007 (CD Szeged, 2007.)