Az alábbi kis gyűjteményben nem csak egy-egy feladat szokványostól eltérő megoldását láthatjuk, hanem olyan feladatokkal is találkozhatunk, amelyben a megoldás váratlan fordulatot vesz, kezdetben nem várt összefüggésekre juthatunk, közben a feladat típusa is módosulhat.
Ezekre a példákra is fennáll általában, hogy a megoldásuk többféle is lehet, ezúttal a nem sablonos megoldásokat tárgyaljuk. A különféle példatárakban sok hasonló feladat található, sőt az érdeklődő olvasó maga is kitalálhat ilyeneket. A feladatok forrását, ahol az ismert, minden esetben megnevezzük.

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1-x}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$ egyenletet.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{4x^2-4x+2}=\dfrac{\sqrt{2}-\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}{\sqrt{\dfrac{1}{2x-1}}}$ egyenletet.

3. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a
$\sqrt[3]{\log_3^3 x+\log_x 9}=\dfrac{\sqrt[6]{3\cdot\log_x^5 3+\log_x 729-\left(\log_x 3\right)\cdot\log_3\left(1+\sqrt{y}\right)}}{\sqrt{\log_x 3}}$ egyenletet.

4. Oldjuk meg az $\left(5^x-2^{x-2}\right)^2+2\cdot\lg\left(5^x+2^{x-2}\right)=x$ egyenletet a valós számok halmazán.

5. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a következő egyenletrendszert:
$x+y+\left(z^2-8z+14\right)\cdot\sqrt{x+y-2}=1,\qquad 2x+5y+\sqrt{xy+z}=3.$

A következő feladatokhoz tekintsünk egy rövid elméleti bevezetőt.
Az $\vec{u}\left(u_1; u_2; u_3\right)$ és $\vec{v}\left(v_1; v_2; v_3\right)$ térbeli vektorok skaláris szorzata definíció szerint az $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\varphi$, ahol φ az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok iránya által bezárt szög. Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok hossza $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}$ és $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}$.
Egyszerű koordináta-geometriai eszközökkel bizonyítható, hogy $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$.
Két térbeli vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk zérus.
Ha $\cos\varphi=1$, azaz, ha $\varphi=0°$, akkor a két vektor egyirányú. Ekkor az egyik vektor előállítható a másik vektor pozitív valós számmal való szorzataként. Ez azt is jelenti, hogy a két vektor megfelelő koordinátáinak hányadosa állandó, vagyis $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}=k$, ahol $k>0$. Ez esetben azt is mondjuk, hogy a két vektor koordinátái arányosak.

Ha pedig $\cos\varphi=-1$, akkor $\varphi=180°$, tehát a két vektor ellentétes irányú. Ekkor az egyik vektor a másik negatív valós számszorosa, azaz $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}=k$, ahol $k<0$.

6. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a $x+2y+3z=2\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{3z-1}\right)$ egyenletet.

7. Adjuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek egyidejűleg kielégítik a következő egyenletet és egyenlőtlenséget: $x+y+z=\frac{3}{2}$, és $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}\geq 2+3^{\sqrt{t-2}}$.

8. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a
$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-8}+\sqrt{z^2-3}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-12$ egyenletet.

9. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a
$\sqrt{\frac{1}{2}+\sin^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 y}+\sqrt{1+tg^2 z}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 y+tg^2 z}{2}+\frac{19}{8}$ egyenletet.

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x; y$ valós számokra fennáll a $3x+4y\leq 5\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenség.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c olyan pozitív valós számok, amelyekre $a+b+c=2$, akkor $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}<7$. (Róka Sándor ötletéből)

12. Egy háromszög $a;b;c$-vel jelölt oldalaira fennáll, hogy $a+b\cdot\sqrt{3}+c\cdot\sqrt{5}=2007$ és $a^2+b^2+c^2=447561$. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

13. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek oldalai $AB=c, BC=a, CA=b$; $A_1B_1=c_1, B_1C_1=a_1, C_1A_1=b_1$. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek akkor és csak akkor hasonlók, ha $\sqrt{a\cdot a_1}+\sqrt{b\cdot b_1}+\sqrt{c\cdot c_1}=\sqrt{(a+b+c)\cdot(a_1+b_1+c_1)}$.

(OKTV II. kategória 1993/1994/2. forduló)

14. Adjuk meg az összes olyan valós számhármast, amelyre a $3x+4y+5z\geq 50$ és $x^2+y^2+z^2=50$ egyszerre teljesül.

15. Adjuk meg az összes olyan valós számhármast, amelyre a $5x+7y+11z\leq -195$ és $x^2+y^2+z^2=195$ egyszerre teljesül.

Az eddigi feladatokban, amelyekben vektorok skaláris szorzatát alkalmaztuk egyenletek, vagy egyenletrendszerek megoldására, minden esetben arra az eredményre jutunk, hogy az alkalmasan választott vektorok által bezárt szögre $\cos\varphi=1$, vagy $\cos\varphi=-1$ azaz $\varphi=0°$ vagy $\varphi=180°$, tehát a vektorok egyirányúak, vagy a két vektor ellentétes irányú. A következő néhány feladat megoldására is használhatjuk a vektorokat, de ezekben $\cos\varphi=1$, vagy $\cos\varphi=-1$ nem áll fenn.

16. Oldjuk meg a természetes számokból álló számnégyesek halmazán az $x+y+z=2t$, $x^2+y^2+z^2=100$ egyenletrendszert.

17. Oldjuk meg a természetes számokból álló számnégyesek halmazán az $x+y+z=5t^2$, $x^2+y^2+z^2=9t^2$ egyenletrendszert.

18. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán az $x^4+y^4+z^4=2025$ és $7x^2+11y^2+19z^2=2006$ egyenletekből álló egyenletrendszert.

(dr. Pintér Ferenc ötletéből)

A vektorok skaláris szorzatát nehezebb egyenletekhez is alkalmazhatjuk, olyanokhoz is, amelyek más eszközzel csak nehezen lennének megoldhatók. A következő feladatokhoz hasonló példák az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola foglalkozásain kerültek tárgyalásra.

19. Oldjuk meg a valós számok körében az $x\cdot\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\cdot\sqrt{x^2+1}$ egyenletet.
(dr. Pintér Ferenc)

20. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x\cdot\sqrt{1-9x^2}+3x\cdot\sqrt{9-x^2}=3$ egyenletet.

21. Bizonyítsuk be, hogy az $(x+1)\cdot\sqrt{7x-3}-\sqrt{8}\cdot(x-2)=\sqrt{14x^3-4x^2+25x+25}$ egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása.

22. Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán a

$\sqrt{5\cdot(x^2+2yz)}+\sqrt{6(y^2+2zx)}+\sqrt{5(z^2+2xy)}=4(x+y+z)$ egyenletet.
(dr. Pintér Ferenc feladata; XII. NMMV, Eger)