Markó Zoltán

Koordinátageometria

Jegyzet (kézirat)

2024. július 3.

Exercitatio et mathematica

ЯMK

Tartalomjegyzék

1.

Koordinátageometria

Ebben a fejezetben a célunk az elemi síkgeometria koordinátarendszer segítségével történő vizsgálata. Korábban már oldottunk meg koordinátageometriai feladatot vektorok segítségével. A koordinátarendszer $P(x;y)$ pontjai kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők voltak a $\mathbf{p}(x;y)$ helyvektorokkal, és ez a megfeleltetés néhány probléma megoldásában már gyümölcsözőnek bizonyult. Most továbblépünk, és alakzatok egyenleteit vizsgáljuk.

1.1. Definíció. A koordinátarendszer egy a alakzatának *egyenlete* olyan, a valós számpárok halmazán értelmezett kétismeretlen egyenlet, amelyet az $(x;y)$ számpár pontosan akkor old meg, ha $P(x;y) \in a$.

1.2. Példa. Az $y = 2x - 3$ egyenlet egy egyenes egyenlete (gondoljunk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 3$ függvény grafikonjára). Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenlet egy kör egyenlete, melynek középpontja az origó, a sugara pedig 5, hiszen pontosan azon pontok koordinátái elégítik ki, melyek távolsága az origótól 5. Továbbá, bármely f függvény grafikonja az $y = f(x)$ egyenletet definiálja, ami éppen az adott függvénygörbe egyenlete.

1.1. Az egyenes koordinátageometriája

Motiváció. Az egyenes az elemi geometria alapfogalma, nem definiáljuk. A koordinátarendszerben ugyanakkor lehetőségünk van az egyenes fogalmát a vektorok segítségével megragadni. Mindez fizikai indíttatású: a klasszikus kinematikában Newton I. törvénye törvénye szerint minden test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez mindaddig, míg valamilyen hatás ennek megváltoztatására nem kényszeríti. A fizikusok az *egyenes pályát* szeretnénk megragadni, a következőképpen. Adott egy pont a koordinátarendszerben, legyen ez $P_0(x_0;y_0)$, és egy $\mathbf{v}(v_1;v_2)$ vektor, amely azt az irányt jelöli ki, amerre a P_0-ból induló test egyenes mentén mozog (ezt a vektort az egyenes *irányvektorának* nevezzük). Ekkor a pályájának bármely P pontjára igaz, hogy $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ valamely alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanssal. Innen P helyvektorát kifejezve azt kapjuk, hogy az egyenes bármely P pontjának helyvektora teljesíti a

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \lambda \cdot \mathbf{v} \tag{1.1}$$

egyenletet, ahol $\mathbf{p}_0$ a P_0 pont helyvektora. Az (1.1) egyenlet már jellemzi az egyenes pontjait, a P_0 ponton átmenő, $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes *paraméteres vektoregyenletének* nevezzük.

1.3. Definíció. Az egyenes egy *irányvektora* bármely olyan nullvektortól különböző vektor, mely az egyenessel párhuzamos.

Jelölés. Az e egyenes irányvektora $\mathbf{v}_e$.

1.4. Megjegyzés. Definíciónkból következik, hogy egy egyenes irányvektora nem egyértelmű, viszont adott egyenes bármely két irányvektora egymással párhuzamos, így egymásnak számszorosa.

Az imént láttuk, hogy amennyiben adott az egyenes egy konkrét pontja (így a hozzá tartozó helyvektor), továbbá egy irányvektora, akkor paraméteres vektoregyenletet írhatunk fel az egyenes pontjainak helyvektoraira. Amennyiben a konkrét pont $P_0(x_0; y_0)$, az irányvektor $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, az egyenes tetszőleges pontja pedig $P(x; y)$, a paraméteres vektoregyenletből az egyenes pontjainak koordinátáira vonatkozó következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Az (1.2) egyenletrendszert a $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes *paraméteres egyenletrendszerének* nevezzük. Amennyiben λ befutja a valós számok halmazát, az egyenletrendszer megoldásait adó $(x; y)$ számpárok meghatározzák az egyenes pontjait.

1.1.1. Az egyenes egyenlete

A paraméteres vektoregyenlet, illetve egyenletrendszer még nem az egyenes egyenlete. Ha a paraméteres egyenletrendszerből ki tudjuk küszöbölni a λ paramétert, akkor már tisztán az egyenes pontjai által kielégített egyenletet kapunk. Ehhez valamelyik egyenletből kifejezzük λ-t. Mivel az irányvektor nem nullvektor, valamelyik koordinátája – λ_1 – nem egyenlő nullával. Ekkor (1.2) első egyenletéből

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_1},$$

amit (1.2) második egyenletébe helyettesítve kapjuk:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{v_1} \cdot v_2$$
$$v_1 \cdot y = v_1 \cdot y_0 + v_2 \cdot x - v_2 \cdot x_0$$

Ugyanezt az egyenletet kapjuk akkor is, ha $v_2 \neq 0$, és a második egyenletből fejezzük ki λ-t, majd azt helyettesítjük az első egyenletbe. Az ismeretleneket tartalmazó kifejezéseket egy oldalra, minden mást a másik oldalra rendezve, a következő állítást kapjuk:

1.5. Állítás. A $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ irányvektorú egyenes egyenlete

$$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0.$$

Az egyenes egyenlete más irányból is megközelíthető.

1.6. Definíció. Az egyenes egy *normálvektora* bármely olyan nullvektortól különböző vektor, mely az egyenesre merőleges.

Jelölés. Az e egyenes normálvektora $\mathbf{n}_e$.

1.7. Megjegyzés. Definíciónkból következik, hogy egy egyenes normálvektora nem egyértelmű, viszont adott egyenes bármely két normálvektora egymással párhuzamos, így egymásnak számszorosa.

Bár első körben a normálvektor kevésbé tűnik indokolt jellemzőnek, mint az irányvektor, az egyenlet felírása szempontjából gyümölcsözőbbnek bizonyul a használata. Amennyiben egy egyenes normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$, egy pontja $P_0(x_0; y_0)$, úgy bármely $P(x; y)$ pontjára igaz, hogy $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$.

Emlék. A $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla. Amennyiben $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, $\mathbf{b}(b_1; b_2)$, úgy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

A szóban forgó vektorok skaláris szorzata tehát 0:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

A koordinátákra áttérve:

$$\begin{aligned} (x - x_0; y - y_0) \cdot (A; B) &= 0 \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) &= 0 \\ A \cdot x - A \cdot x_0 + B \cdot y - B \cdot y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Az ismeretleneket tartalmazó kifejezéseket egy oldalra, minden mást a másik oldalra rendezve, a következő állítást kapjuk:

1.8. Állítás. A $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete

$$A \cdot x + B \cdot y = A \cdot x_0 + B \cdot y_0.$$

A kapott egyenlet előjelek szempontjából szimmetrikusabb, mint az irányvektor segítségével felírt egyenlet, továbbá könnyebben is megjegyezhető, hiszen a normálvektor megfelelő koordinátái az adott pont (illetve az általános pont) megfelelő koordinátáival szorzódnak össze. Tuladjonképpen elegendő pusztán a normálvektoros egyenletet ismerni, ugyanis irányvektorból könnyen számolható normálvektor, hiszen egymásnak 90°-os elforgatottjai.

Emlék. A $\mathbf{v}(v_1; v_2)$ vektor 90°-os elforgatottja a $\mathbf{v}'(-v_2; v_1)$ vektor, $-90°$-os elforgatottja a $\mathbf{v}''(v_2; -v_1)$ vektor.

Ennek következtében, ha egy egyenes normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$, akkor mind a $(B; -A)$, mind a $(-B; A)$ vektor irányvektora lesz. Ugyanígy, ha egy egyenes irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, akkor mind a $(v_2; -v_1)$, mind a $(-v_2; v_1)$ vektor alkalmas normálvektor.

1.9. Megjegyzés. Az egyenes egyenletét tehát fel tudjuk írni, ha ismert egy pontja, továbbá egy irányvektora vagy normálvektora. További nevezetes alakok is ismertek, például felírhatnánk formulát két adott ponton átmenő egyenes egyenletére is. Ez ugyanakkor mellőzhető: amennyiben A és B az e egyenes két pontja, úgy $\mathbf{v}_e = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, amiből már normálvektor is számolható.

1.10. Példa. Az ABC háromszög csúcsai $A(-3; 1)$, $B(6; -2)$, $C(0; 6)$. A szokásos jelölések használatával írjuk fel a c oldal egyenesének, az m_c magasságvonalnak, az f_c oldalfelező merőlegesnek, az s_c súlyvonalnak, a k_b középvonalnak, illetve az f_α szögfelezőnek az egyenletét!

Megoldás. Tekintsük az 1.1a. ábra jelöléseit!

- c egyenlete: c egy irányvektora $\mathbf{v}_c = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (9;-3)$. Ehelyett tekinthetjük a $\mathbf{v}_c' = (3;-1)$ vektort is (célszerű mindig élni a hasonló egyszerűsítéssel). Ekkor c egy normálvektora $\mathbf{n}_c = (1;3)$. Mivel $A(-3;1) \in c$, ezért c egyenlete a normálvektoros egyenlet alapján: $c : x + 3y = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1$, vagyis $\underline{\underline{c : x + 3y = 0}}$.

- m_c egyenlete: m_c egy normálvektora éppen c egy irányvektora, vagyis például $\mathbf{n}_{m_c} = (3;-1)$. Mivel $C(0;6) \in m_c$, ezért m_c egyenlete: $m_c : 3x - y = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 6$, vagyis $\underline{\underline{m_c : 3x - y = -6}}$.

- f_c egyenlete: f_c egy normálvektora ismét lehet $\mathbf{n}_{f_c} = (3;-1)$. Legyen F_c az $\overline{AB}$ oldal felezőpontja, ekkor $F_c\left(\frac{-3+6}{2}; \frac{1-2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Mivel $F_c \in f_c$, ezért f_c egyenlete: $f_c : 3x - y = 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, azaz $\underline{\underline{f_c : 3x - y = 5}}$.

- s_c egyenlete: s_c egy irányvektora $\mathbf{v}_{s_c} = \overrightarrow{CF_c} = \mathbf{f}_c - \mathbf{c} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{13}{2}\right)$. Ismét érdemes ehelyett a $\mathbf{v}_{s_c}' = (3;-13)$ irányvektort tekinteni, amiből egy normálvektor $\mathbf{n}_{s_c} = (13;3)$. Mivel $C(0;6) \in s_c$, ezért s_c egyenlete: $s_c = 13x + 3y = 13 \cdot 0 + 3 \cdot 6$, vagyis $\underline{\underline{s_c : 13x + 3y = 18}}$.

- k_b egyenlete: az eddigi információk birtokában többféleképpen is dolgozhatunk. Mivel $F_c\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \in k_b$, ezért elegendő meadni k_b egy normálvektorát. Mivel $k_B \parallel AC$, ezért irányvektor azonnal adódik: $\mathbf{v}_{k_b} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (3;5)$, amiből $\mathbf{n}_{k_b} = (5;-3)$. $F_c \in k_b$ miatt k_b egyenlete: $k_b : 5x - 3y = 5 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, vagyis $\underline{\underline{k_b : 5x - 3y = 9}}$.

  Megtehettük volna azt is, hogy először kiszámtjuk a $\overline{BC}$ oldal F_a felezőpontját: $F_a\left(\frac{6+0}{2}; \frac{-2+6}{2}\right) = (3;2)$. Ekkor k_b egy irányvektora $\mathbf{v}_{k_b}' = \overrightarrow{F_cF_a} = \mathbf{f}_a - \mathbf{f}_c = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, ami helyett érdemes a $(3;5)$ irányvektort tekinteni. Innentől megoldásunk az előző gondolatmenettel megegyező.

- f_α egyenlete: Korábban láttuk, hogy adott vektorok által bezárt szögtartomány felezőjének irányába mutató vektort kaphatunk úgy, hogy a szóban forgó vektorokból velük megegyező irányú egységvektorokat készítünk, majd ezek összegét tekintjük. Ennek megfelelően eljárva f_α egy irányvektorát fogjuk kapni. Lássuk hát: $\overrightarrow{AB} = (9;-3)$, amiből

$$\mathbf{v}_1 := \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(9;-3)}{\sqrt{9^2 + (-3)^2}} = \frac{(9;-3)}{3\sqrt{10}} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}; -\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

  Hasonlóan, $\overrightarrow{AC} = (3;5)$, amiből

$$\mathbf{v}_2 := \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(3;5)}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{(3;5)}{\sqrt{34}} = \left(\frac{3\sqrt{34}}{34}; -\frac{5\sqrt{34}}{34}\right).$$

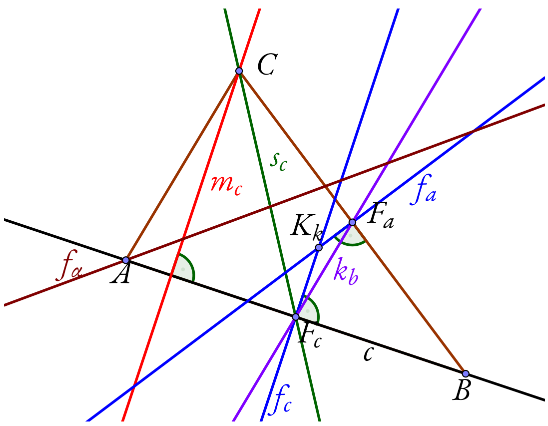
Ekkor f_α egy irányvektora:

$$\mathbf{v}_{f_\alpha} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \left(\frac{15\sqrt{34}+51\sqrt{10}}{170}; -\frac{25\sqrt{34}+17\sqrt{10}}{170}\right),$$

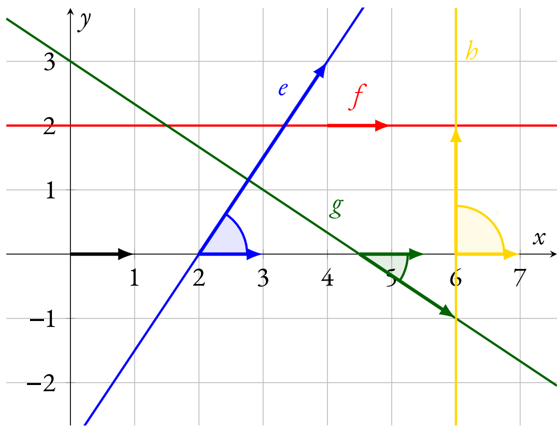
ami helyett tekinthetjük a $\mathbf{v}'_{f_\alpha} = \left(15\sqrt{34}+51\sqrt{10}; -25\sqrt{34}-17\sqrt{10}\right)$ irányvektort. f_α egy normálvektora ezáltal $\mathbf{n}_{f_\alpha} = \left(25\sqrt{34}+17\sqrt{10}; 15\sqrt{34}+51\sqrt{10}\right)$. Mivel $A(-3;1) \in f_\alpha$, ezért f_α egyenlete:

$$f_\alpha : \left(25\sqrt{34}+17\sqrt{10}\right)x + \left(15\sqrt{34}+51\sqrt{10}\right)y = \left(25\sqrt{34}+17\sqrt{10}\right)\cdot(-3) + \left(15\sqrt{34}+51\sqrt{10}\right)\cdot 1,$$

azaz $\underline{\underline{f_\alpha : \left(25\sqrt{34}+17\sqrt{10}\right)x + \left(15\sqrt{34}+51\sqrt{10}\right)y = -60\sqrt{34}.}}$



(a)



(b)

1.1. ábra

1.11. Megjegyzés. Az 1.10. feladat megoldása során néhány általános elvet is alkalmaztunk, melyek a következők:

- Számoljunk a lehető legegyszerűbb irányvektorral/normálvektorral, vagyis amennyiben törtek szerelnek a koordinátáikban, úgy lehetőleg a nevezők legkisebb közös többszörösével szorozva a szóban forgó vektort dolgozzunk tovább olyan vektorral, melynek koordinátái már egész számok.
- Az irányvektorból tetszőlegs irányú ±90°-os forgatással normálvektor kapható. Hogy melyik irányba forgatunk, ott ismét az egyszerűség elve alapján dolgozunk: ha az irányvektornak csak az egyik koordinátája negatív, érdemes annak az előjelét megváltoztatni.

1.12. Feladat. [[2] 3543] Igazoljuk, hogy az a és b tengelymetszetekkel megadott egyenes egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ ahol } ab \neq 0.$$

A koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenesek egyenlete: $x = a$, illetve $y = b$.

Megoldás. Legyen a szóban forgó egyenes e. Ha valóban van mindkét tengellyel metszet, akkor ismerjük az egyenes két pontját. Legyenek ezek $A(a;0)$, $B(0;b)$. Ekkor $\mathbf{v}_e = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-a;b)$, amiből $\mathbf{n}_e = (b;a)$. Figyelembe véve, hogy $A(a;0) \in e$, az egyenes egyenlete: $e : b \cdot x + a \cdot y = b \cdot a + a \cdot 0$, azaz $e : b \cdot x + a \cdot y = a \cdot b$. Ezt az egyenletet $ab \neq 0$-val osztva a kívánt alakot kapjuk.

Ha most $A(a;0) \in e$ és e párhuzamos az y-tengellyel, úgy egy irányvektora $\mathbf{v}_e = (0;1)$, amiből $\mathbf{n}_e = (1;0)$. Ekkor e egyenlete $e : 1 \cdot x + 0 \cdot y = 1 \cdot a + 0 \cdot 0$, vagyis valóban $e : x = a$ alakú.

Ugyanígy, ha $B(0;b) \in e$ és e párhuzamos az x-tengellyel, úgy egy irányvektora $\mathbf{v}_e = (1;0)$, amiből $\mathbf{n}_e = (0;1)$. Ekkor e egyenlete $e : 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0 \cdot 0 + 1 \cdot b$, vagyis valóban $e : y = b$ alakú.

1.13. Megjegyzés. Az egyenes egyenletének az 1.12. feladatban szereplő alakját az egyenes *tengelymetszetes egyenletének* nevezzük.

1.14. Definíció. Legyen az e egyenes $\mathbf{v}_e$ irányvektorának első koordinátája nemnegatív. Az e egyenes *irányszöge* alatt a $\mathbf{v}_e$ és az $(1;0)$ vektor által bezárt előjeles szöget értjük, amelynek nagysága a $\mathbf{v}_e$ és az $(1;0)$ vektorok szöge, továbbá nemnegatív, ha $\mathbf{v}$ második koordinátája nemnegatív, és negatív, ha $\mathbf{v}$ második koordinátája negatív.

A definícióból következik, hogy egyenes irányszöge $-90°$-nál nagyobb, és legfeljebb $90°$ lehet. A definíció pongyolább (ám szemléletesebb) megfogalmazása: egy egyenes irányszöge az egyenes által a vízszintessel bezárt irányított szög. Berajzolt irányszögek láthatóak az 1.1b. ábrán: az e egyenes irányszöge pozitív, az f egyenes irányszöge $0°$, a g egyenes irányszöge negatív, míg a h egyenes irányszöge $90°$. Általánosan megállapítható, hogy az x-tengellyel párhuzamos egyenesek irányszöge $0°$, az y-tengellyel párhuzamos egyenesek irányszöge $90°$.

1.15. Definíció. Az e egyenes irányszögének tangensét – amennyiben létezik – az e egyenes *iránytangensének* vagy *meredekségének* nevezzük.

Jelölés. Az e egyenes meredekségének jelölése: m_e.

1.16. Megjegyzés. Az y-tengellyel párhuzamos egyeneseknek nincs meredeksége.

Az egyenest nemcsak egy pontja és irányvektora/normálvektora, hanem például egy pontja és a meredeksége is meghatározza. Érdemes meggondolnunk, hogy milyen kapcsolatban vannak új fogalmaink a korábbiakkal, illetve milyen egyenletet írhatunk fel az egyenes egy pontjának, illetve meredekségének ismeretében.

Emlék. Legyenek $\mathbf{a}(a_1;a_2)$, $\mathbf{b}(b_1;b_2)$ vektorok. Ekkor az általuk bezárt szög koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Legyen a vizsgált egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(v_1;v_2)$, ahol $v_1 > 0$. Ekkor az egyenes α irányszögének nagyságát a $\mathbf{v}$ és az $(1;0)$ vektorok skaláris szorzatának segítségével számolhatjuk:

$$\cos|\alpha| = \frac{(v_1;v_2) \cdot (1;0)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot 1} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

A kérdéses szög nagyságának szinusznégyzete:

$$\sin^2|\alpha| = 1 - \cos^2|\alpha| = 1 - \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2},$$

amiből

$$\sin|\alpha| = \frac{|v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Az irányszög definíciója szerint $\alpha = |\alpha|$, ha $v_2 \geq 0$, és $\alpha = -|\alpha|$, ha $v_2 < 0$. Eszerint:

- Ha $v_2 \geq 0$, akkor $|v_2| = v_2$, ezért

  $$\cos\alpha = \cos|\alpha| = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

  és

  $$\sin\alpha = \sin|\alpha| = \frac{|v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

  amiből

  $$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{v_2}{v_1}.$$

- Ha $v_2 < 0$, akkor $|v_2| = -v_2$, ezért

  $$\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos|\alpha| = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

  és

  $$\sin\alpha = -\sin(-\alpha) = -\sin|\alpha| = -\frac{|v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

  amiből

  $$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Akárhogyan is, a következő eredményre jutottunk:

1.17. Állítás. Ha egy egyenes irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, $v_1 \neq 0$, akkor meredeksége $m = \dfrac{v_2}{v_1}$.

1.18. Megjegyzés. Az 1.17. állítást valójában csak akor igazoltuk, ha $v_1 > 0$. A meredekségre felírt formulánk ettől függetlenül viszont igaz akkor is, ha az irányvektor első koordinátája negatív. Legyen ugyanis például az egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}(v_1; v_2)$, $v_1 < 0$. Ekkor $\mathbf{v}'(-v_1; -v_2)$ is irányvektor, továbbá első koordinátája pozitív. Emiatt $m = \dfrac{-v_2}{-v_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$.

A meredekség a normálvektor koordinátáival is meghatározható. Ha egy egyenes normálvektora $\mathbf{n}(A; B)$, akkor egy irányvektora $\mathbf{v}(B; -A)$, vagyis meredeksége $m = -\frac{A}{B}$ (ami természetesen csak akkor értelmezhető, ha $B \neq 0$). Ebben az esetben írjuk fel a normálvektoros egyenletet, és végezzünk ekvivalens átalakításokat úgy, hogy megjelenjen a meredekség:

$$\begin{aligned}
A \cdot x + B \cdot y &= A \cdot x_0 + B \cdot y_0 \\
-\frac{A}{B} \cdot x - y &= -\frac{A}{B} \cdot x_0 - y_0 \\
m \cdot x - y &= m \cdot x_0 - y_0 \\
y - y_0 &= m \cdot (x - x_0)
\end{aligned}$$

A következő állítást kaptuk:

1.19. Állítás. A $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0).$$

1.20. Megjegyzés. Mint láttuk, az y-tengellyel párhuzamos egyeneseknek nincs meredeksége. Az 1.19. állítás a teljes pompájában emiatt a következőképpen hangzik: ha egy egyenes valamely pontja $P_0(x_0; y_0)$, akkor amennyiben az egyenesnek nincs meredeksége, úgy egyenlete $x = x_0$. Ha az egyenesnek létezik m meredeksége, úgy egyenlete $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ alakú. Ez az egyenlet az egyenes egyenletének *iránytényezős alakja*.

1.21. Feladat ([2] 3560)**.** Igazoljuk, hogy az origón átmenő, az x-tengellyel 60°-os szöget bezáró egyenes nem megy át – az origón kívül – egyetlen egy olyan ponton sem, melyek koordinátái racionális számok.

Megoldás. Az e egyenes irányszöge ±60°, amiből meredeksége $m = \pm\sqrt{3}$. Mivel $(0; 0) \in e$, ezért $e : y = \pm\sqrt{3} \cdot x$ alakú. Ha most $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, akkor $\pm\sqrt{3} \cdot x \notin \mathbb{Q}$, ami bizonyítja az állítást.

1.22. Feladat ([2] 3568)**.** Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely átmegy a $P(3; 7)$ ponton, és P felezi az egyenesnek a koordinátatengelyek közötti szakaszát?

Megoldás. Messe az e egyenes az x-tengelyt az $A(a; 0)$ pontban, az y-tengelyt a $B(0; b)$ pontban. Mivel $P(3; 7)$ az $\overline{AB}$ felezőpontja, ezért

$$\frac{a + 0}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{0 + b}{2} = 7.$$

Ebből $a = 6$, $b = 14$. Az egyenes egyenletének tengelymetszetes alakja szerint $\underline{\underline{e : \frac{x}{6} + \frac{y}{14} = 1}}$.

1.23. Feladat ([2] 3570)**.** Írjuk fel a $P(3; 1)$ ponton átmenő azon egyenes egyenletét, amely a koordinátatengelyek pozitív felével 8 egység területű háromszöget határol!

Megoldás. Messe az e egyenes az x-tengelyt az $A(a;0)$ pontban, az y-tengelyt a $B(0;b)$ pontban! Ekkor az egyenlete $e: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ alakú. Mivel $P(3;1)\in e$, ezért $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$. A területre vonatkozó feltétel: $\frac{a\cdot b}{2}=8$. Így a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{a}+\frac{1}{b}&=1\\ a\cdot b&=16\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $\frac{3b+a}{ab}=1$, azaz a második egyenlet szerint $3b+a=16$, s így $a=16-3b$. Beírva ezt a második egyenletbe:

$$\begin{aligned}(16-3b)\cdot b&=16\\ -3b^2+16b-16&=0\end{aligned}$$

Megoldva a másodfokú egyenletet: $b_1=\frac{4}{3}$, $b_2=4$. A megfelelő a értékek: $a_1=12$, $a_2=4$. Ennek megfelelően két egyenes is jó megoldást ad, melyek egyenletei:

$$\underline{\underline{e_1: \frac{x}{12}+\frac{3y}{4}=1}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{e_2: \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1.}}$$

1.24. Megjegyzés. Az eddigi tapasztalataink alapján azt látjuk, hogy bármely egyenes egyenlete $Ax+By=C$ alakra hozható, ahol A és B egyszerre nem lehet 0. Ezt a feltételt algebrailag a következőképpen fogalmazhatjuk meg egyszerűen: $A^2+B^2\neq 0$. Sőt, ha az egyenes normálvektora $\mathbf{n}(A;B)$, akkor egyenlete éppen $Ax+By=C$ alakú.

Megfordítva a kérdést: milyen alakzatot határoz meg a koordinátasíkon egy $Ax+By=C$ egyenlet, ahol $A^2+B^2\neq 0$? Ha $B=0$, akkor szükségképpen $A\neq 0$, amiből az $x=\frac{C}{A}$ egyenletet nyerjük. Ez éppen egy olyan egyenes egyenlete, melynek normálvektora $\mathbf{n}(A;0)$. Ha $B\neq 0$, akkor a $P_0\left(0;\frac{C}{B}\right)$ pont rajta van az egyenesen, mint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk. Írjuk fel az $\mathbf{n}(A;B)$ normálvektorú, P_0-ra illeszkedő e egyenes egyenletét!

$$e: A\cdot x+B\cdot y=A\cdot 0+B\cdot\frac{C}{B},$$

azaz éppen az $Ax+By=C$ egyenletet kapjuk.

Igazoltuk tehát a következő állítást.

1.25. Állítás. Az $Ax+By=C$, $A^2+B^2\neq 0$ egyenlet egyenes egyenlete, melynek egy normálvektora $\mathbf{n}(A;B)$.

1.26. Következmény. Az $Ax+By=C$ alakú egyenletről azonnal leolvasható az egyenes egy normálvektora: $(A;B)$. Ebből az egyenes irányvektora $(B;-A)$ vagy $(-B;A)$, illetve meredeksége $-\frac{A}{B}$ (amennyiben $B\neq 0$).

1.27. Feladat ([2] 3592)**.** Írjuk fel a $P(-3;2)$ ponton áthaladó és az $5x-9y=-43$ egyenletű egyenessel 45°-os szöget bezáró egyenes egyenletét!

Megoldás. Legyen $f: 5x-9y=-43$. A feltételnek két egyenes felel meg, legyenek ezek $e_1; e_2$. f egyenletéből $\mathbf{n}_f=(5;-9)$, amiből $\mathbf{v}_f=(9;5)$. Forgassuk le a $\mathbf{v}_f$ vektort $\pm 90°$-kal, így a $\mathbf{v_1}=(5;-9)$, illetve $\mathbf{v}_2=(-5;9)$ vektorokat nyerjük. Mivel ezek hossza megegyezik $\mathbf{v}_f$ hosszával, ezért a $\mathbf{v_1}+\mathbf{v}_f$, illetve $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_f$ vektorok $45°$-os szöget fognak bezárni a $\mathbf{v}_f$ vektorral. Ezen összegek egyben a kérdéses egyenesek irányvektorait adják meg:

$$\mathbf{v}_{e_1}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_f=(5;-9)+(9;5)=(14;-4);\quad \mathbf{v}_{e_2}=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_f=(-5;9)+(9;5)=(4;14).$$

Egyszerűbb irányvektorokra áttérve: $\mathbf{v}'_{e_1}=(7;-2)$, $\mathbf{v}'_{e_2}=(2;7)$. Ebből a kérdéses egyenesek normálvektorai $\mathbf{n}_{e_1}=(2;7)$, illetve $\mathbf{n}_{e_2}=(7;-2)$. Mivel $P(3;2)\in e_1; e_2$, ezért a keresett egyenletek:

$$e_1: 2x+7y=2\cdot 3+7\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{e_1: 2x+7y=20,}}$$

illetve

$$e_1: 7x-2y=7\cdot 3+(-2)\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{e_1: 7x-2y=17.}}$$

1.1.2. Két egyenes metszéspontja

Amennyiben egy $P(x;y)$ pont az e, illetve f egyenesnek is pontja, úgy P kielégíti e és f egyenletét is. Ebből következik, hogy $P(x;y)$ pont pontosan akkor metszéspontja az e és f egyenesnek, ha az $(x;y)$ számpár megoldja az e és f egyenletéből álló egyenletrendszert.

1.28. Példa. Határozzuk meg az 1.10. példa ABC háromszöge esetén a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit!

Megoldás. Tekintsük az 1.1a. ábra jelöléseit. A háromszög köré írható kör K_k középpontja az f_a, illetve f_c oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Azt már az 1.10. példa megoldása során kiszámoltuk, hogy $\underline{f_c: 3x-y=5}$, szükségünk van még f_a egyenletére. f_a egy normálvektora: $\mathbf{n}_{f_a}=\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c}=(-6;8)$, aminél egyszerűbb a $\mathbf{n}'_{f_a}=(-3;4)$ vektort tekinteni. Szintén korábban kiszámoltuk, hogy $F_a(3;2)$. Mivel $F_a\in f_a$, ezért f_a egyenlete: $f_a: -3x+4y=(-3)\cdot 3+4\cdot 2$, azaz $\underline{f_a: -3x+4y=-1}$.

Mivel $K_k=f_a\cap f_c$, ezért megoldandó a következő egyenletrendszer:

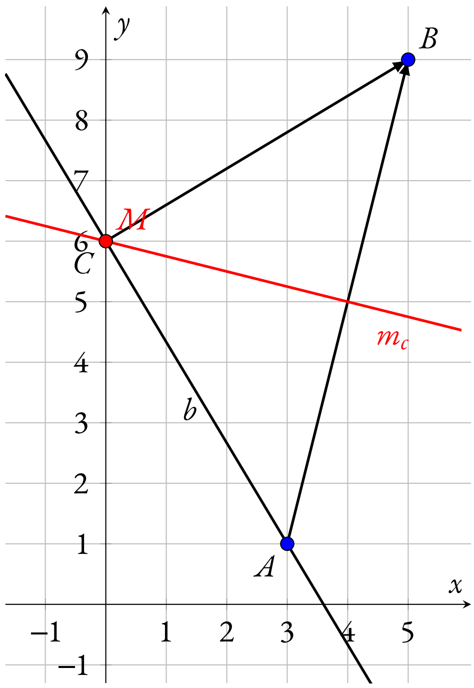
$$\left.\begin{aligned} 3x-y&=5\\ -3x+4y&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket összeadva: $3y=4$, amiből $y=\dfrac{4}{3}$. Visszahelyettesítve például az első egyenletbe: $3x-\dfrac{4}{3}=5$, amiből $x=\dfrac{19}{9}$. A körírható kör középpontja tehát $\underline{\underline{K_k\left(\dfrac{19}{9};\dfrac{4}{3}\right)}}$.

1.29. Feladat ([1] 195/5)**.** Egy háromszög két csúcspontja $A(3;1)$, $B(5;9)$. A háromszög magasságpontja $M(0;6)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit!

Megoldás. Tekintsük az 1.2. ábra jelöléseit! C-t a következőképpen határozzuk meg: először felrjuk m_c, majd b egyenletét. Ezután C az m_c és b egyenesek metszéspontjaként adódik.

m_c egyenlete: m_c egy normálvektora: $\mathbf{n}_{m_c}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=(2;8)$. Egyszerűbb normálvektor: $\mathbf{n}'_{m_c}=(1;4)$. Mivel $M\in m_c$, ezért $m_c: x+4y=1\cdot 0+4\cdot 6$, azaz $\underline{m_c: x+4y=24}$.



1.2. ábra

b egyenlete: b egy normálvektora: $\mathbf{n}_b = \overrightarrow{MB} = \mathbf{b} - \mathbf{m} = (5; 3)$. Mivel $A \in b$, ezért $b : 5x + 3y = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1$, azaz $b : 5x + 3y = 18$.

Mivel $C = m_c \cap b$, ezért megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x + 4y &= 24 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\}$$

Szorozzuk az első egyenletet öttel:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 20y &= 120 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\}$$

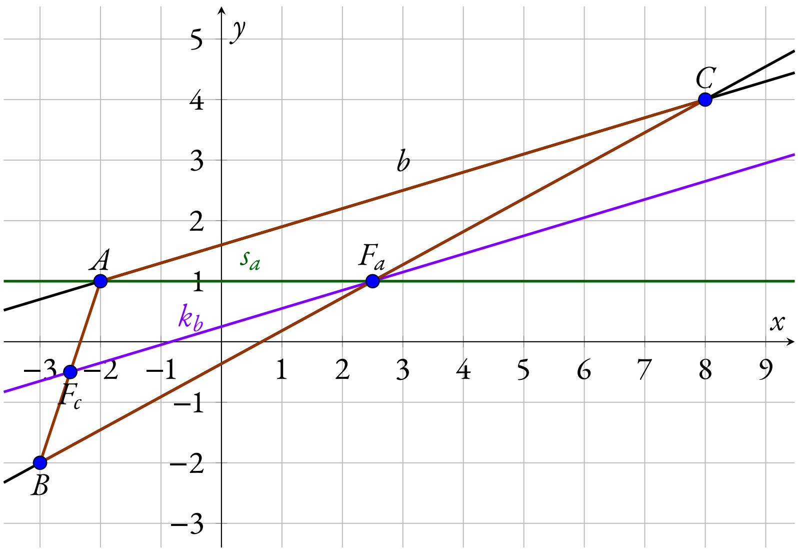
Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót: $17y = 102$, amiből $y = 6$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $x + 4 \cdot 6 = 24$, amiből $y = 0$ adódik. Azt kaptuk, hogy a keresett pont: $\underline{\underline{C(0; 6)}}$. Ez éppen a megadott M magasságpont, vagyis a szóban forgó háromszög derékszögű, és éppen a derékszögű csúcsot határoztuk meg.

1.30. Feladat ([2] 3615)**.** Határozzuk meg az ABC háromszög csúcsainak koordinátáit, ha az AC oldal egyenlete $3x - 10y = -16$, az A-ból induló súlyvonal egyenlete $y = 1$ és az $\overline{AB}$ oldal felezőpontja $F\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Megoldás. Tekintsük az 1.3. ábra jelöléseit: $b : 3x - 10y = -16$; $s_a : y = 1$, továbbá $F_c\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Mivel $A = b \cap s_a$, ezért első körben megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 10y &= -16 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$



1.3. ábra

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve: $3x - 10 = -16$, amiből $x = -2$ adódik. Eszerint $\underline{\underline{A(-2;1)}}$.

Mivel F_c az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja, ezért ha $B(b_1;b_2)$, akkor

$$\frac{-2+b_1}{2} = -\frac{5}{2}; \quad \frac{1+b_2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Az egyenleteket megoldva: $b_1 = -3$, $b_2 = -2$, vagyis $\underline{\underline{B(-3;-2)}}$.

C meghatározásához először a $\overline{BC}$ oldal F_a felezőpontját határozzuk meg. Ehhez írjuk fel a k_b középvonal egyenletét! $k_b \parallel b$, így egy normálvektora $\mathbf{n}_{k_b} = \mathbf{n}_b = (3;-10)$ a b egyenletéből leolvasva. Mivel $F_c \in k_b$, ezért $k_b : 3x - 10y = 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, azaz $k_b : 3x - 10y = -\frac{5}{2}$, 2-vel szorozva mindkét oldalt: $\underline{k_b : 6x - 20y = -5}$.

$F_a = k_b \cap s_a$, így megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 6x - 20y &= -5 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve: $6x - 20 = -5$, amiből $x = \frac{5}{2}$, vagyis $\underline{F_a\left(\frac{5}{2};1\right)}$.

Végül, ha $C(c_1;c_2)$, akkor mivel F_a a $\overline{BC}$ szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{-3+c_1}{2} = \frac{5}{2}; \quad \frac{-2+c_2}{2} = 1.$$

Az egyenleteket megoldva: $c_1 = 8$, $c_2 = 4$, azaz $\underline{\underline{C(8;4)}}$. Ellenőrzésül arról is meggyőződhetünk, hogy C valóban rajta van a b egyenesen.

Emlék. Ha $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, akkor az A és B pontok távolsága (egyben az $\overline{AB}$ szakasz hossza):

$$\mathrm{d}(A;B) = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}.$$

1.31. Feladat ([2] 3639)**.** Az $x + y = b$ egyenletű egyenesnél határozzuk meg b értékét úgy, hogy az egyenesből a $-x + 2y = 6$ és az $5x - y = 2$ egyenletű egyenesek egység hosszú szakaszt vágjanak ki.

Megoldás. Legyen $e : x + y = b, f : -x + 2y = 6, g : 5x - y = 2$. Határozzuk meg az $A := e \cap f$ és $B := e \cap g$ metszéspontok koordinátáit.

$A = e \cap f$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= b \\ -x + 2y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket összeadva: $3y = b + 6$, amiből $y = \dfrac{b+6}{3}$. Beírva ezt az első egyenletbe: $x + \dfrac{b+6}{3} = b$, amiből $x = \dfrac{2b-6}{3}$. Eszerint $\underline{A\left(\dfrac{2b-6}{3}; \dfrac{b+6}{3}\right)}$.

$B = e \cap g$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= b \\ 5x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenleteket összeadva: $6x = b + 2$, amiből $x = \dfrac{b+2}{6}$. Beírva az első egyenletbe: $\dfrac{b+2}{6} + y = b$, amiből $y = \dfrac{5b-2}{6}$. Eszerint $\underline{B\left(\dfrac{b+2}{6}; \dfrac{5b-2}{6}\right)}$.

A feltétel szerint $\left|\overline{AB}\right| = 1$. Ennek alapján

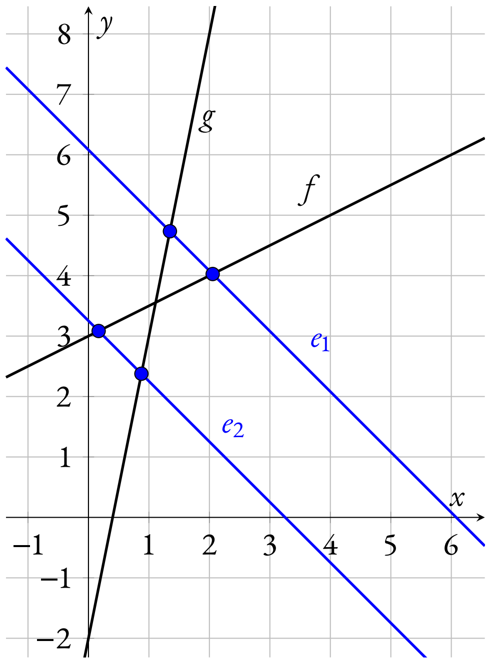
$$\sqrt{\left(\frac{2b-6}{3} - \frac{b+2}{6}\right)^2 + \left(\frac{b+6}{3} - \frac{5b-2}{6}\right)^2} = 1$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, emelhetünk négyzetre:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4b-12-b-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2b+12-5b+2}{6}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{3b-14}{6}\right)^2 + \left(\frac{-3b+14}{6}\right)^2 &= 1 \\ 2 \cdot \left(\frac{3b-14}{6}\right)^2 &= 1 \\ (3b-14)^2 &= 18 \end{aligned}$$

Ennek megoldásából két megfelelő b értéket kapunk: $\underline{\underline{b_1 = \dfrac{14+3\sqrt{2}}{3}}}$ vagy $\underline{\underline{b_2 = \dfrac{14-3\sqrt{2}}{3}}}$. A szóban forgó egyeneseket az 1.4. ábrán ábrázoltuk.

1.32. Feladat ([2] 3641)**.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $3x - 5y = 6$ és a $4x + y + 6 = 0$ egyenletű egyenesek közé eső darabját az origó felezi.



1.4. ábra

Megoldás. Legyen $f : 3x - 5y = 6$ és $g : 4x + y + 6 = 0$. A keresett e egyenes egyenletét a meredekség segítségével írjuk fel. Mivel $(0; 0) \in e$, ezért $e : x = 0$ vagy $e : y = mx$ alakú.

Először vizsgáljuk meg, megoldja-e a feladatot az $x = 0$ egyenes. Ennek metszéspontja f-fel az $A\left(0; -\frac{6}{5}\right)$ pont, g-vel a $B(0; -6)$ pont (lásd az 1.5. ábrát).

Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja $F\left(\frac{0+0}{2}; \frac{-\frac{6}{5} - 6}{2}\right) = \left(0; -\frac{18}{5}\right) \neq (0; 0)$, így az $x = 0$ egyenes nem megoldása a feladatnak.

Ezek után feltehetjük, hogy $e : y = mx$ alakú. Legyen $A_1 := e \cap f$, $B_1 := e \cap g$ az 1.5. ábrán látható módon.

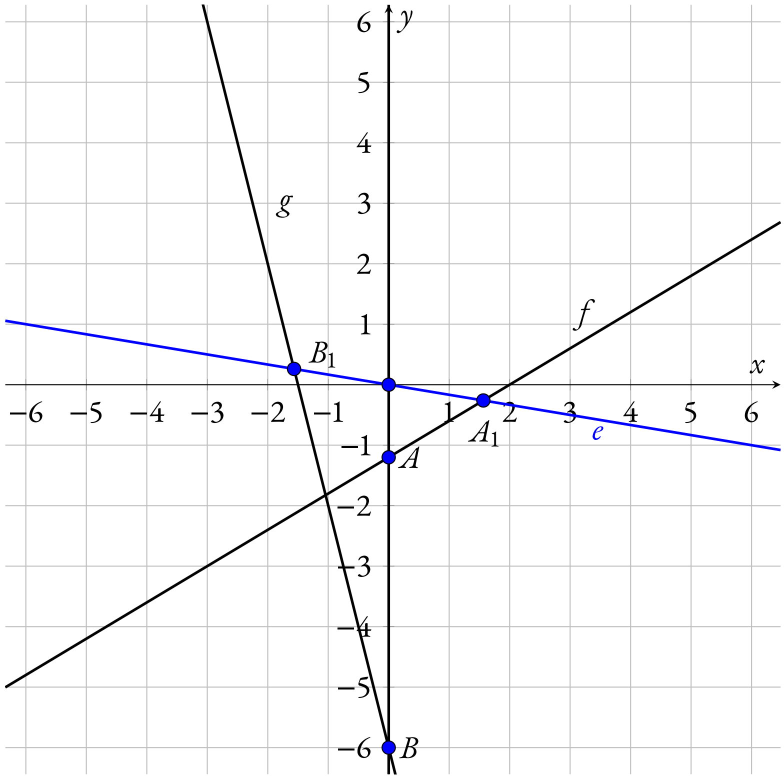
$A_1 = e \cap f$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ 3x - 5y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikba írva:

$$3x - 5 \cdot mx = 6$$
$$(3 - 5m) \cdot x = 6$$

$3 - 5m \neq 0$, azaz $\underline{m \neq \frac{3}{5}}$, ekkor ugyanis az egyenletrendszernek nincs megoldása (geometriailag ez azt jelentené, hogy $e \parallel f$). Ha viszont $3 - 5m \neq 0$, akkor a kapott egyenletből $x = \frac{6}{3 - 5m}$ adódik. Visszaírva e egyenletébe: $y = \frac{6m}{3 - 5m}$, így $\underline{A_1\left(\frac{6}{3 - 5m}; \frac{6m}{3 - 5m}\right)}$.



1.5. ábra

$B_1 = e \cap g$ meghatározához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx \\ 4x + y + 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikba írva:

$$\begin{aligned} 4x + mx + 6 &= 0 \\ (4+m)\cdot x &= -6 \end{aligned}$$

$4 + m \neq 0$, azaz $\underline{m \neq -4}$, ekkor ugyanis az egyenletrendszernek nincs megoldása (ekkor $e \parallel g$ teljesülne). Ha viszont $4 + m \neq 0$, akkor a kapott egyenletből $x = -\dfrac{6}{4+m}$ adódik. Visszaírva e egyenletébe: $y = -\dfrac{6m}{4+m}$, így $\underline{B_1\left(-\dfrac{6}{4+m}; -\dfrac{6m}{4+m}\right)}$.

A feltétel szerint az $\overline{A_1B_1}$ szakasz felezőpontja az origó. Amennyiben ez teljesül, úgy igaznak kell lennie a következő két egyenletnek:

$$\frac{\dfrac{6}{3-5m} - \dfrac{6}{4+m}}{2} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\dfrac{6m}{3-5m} - \dfrac{6m}{4+m}}{2} = 0.$$

Oldjuk meg először az első egyenletet:

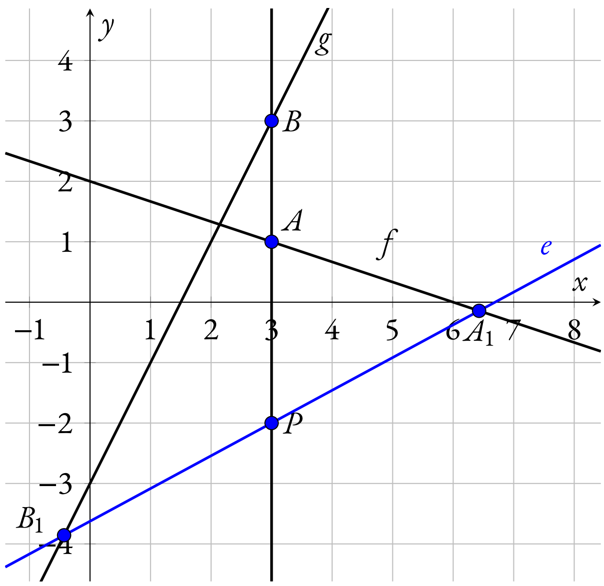
$$\begin{aligned}\frac{6(4+m)-6(3-5m)}{(3-5m)(4+m)} &= 0\\ 24+6m-18+30m &= 0\\ 36m &= -6\\ m &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

A második egyenlet az elsőnek m-szerese, így megoldásai $m_1 = -\frac{1}{6}$; $m_2 = 0$. A kettőnek együtt kell teljesülnie, amiből az $m = -\frac{1}{6}$ értéket kapjuk, mely a kikötéseknek megfelel. A keresett egyenes egyenlete pedig $e : y = -\frac{1}{6}x$.

1.33. Feladat ([2] 3642)**.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;-2)$ ponton, és P felezi az egyenesnek az $x+3y=6$ és a $2x-y=3$ egyenletű egyenesek közé eső szakaszát.

Megoldás. Legyen $f : x+3y=6$ és $g : 2x-y=3$. A keresett e egyenes egyenletét iránytényezős alakban írjuk fel. Mivel $P(3;-2)\in e$, ezért $e : x=3$ vagy $e : y-(-2)=m(x-3)$ alakú.

Először vizsgáljuk meg, megoldja-e a feladatot az $x=3$ egyenes. Ennek metszéspontja f-fel az $A(3;1)$ pont, g-vel a $B(3;3)$ pont (lásd az 1.6. ábrát).



1.6. ábra

Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja $F\left(\frac{3+3}{2};\frac{1+3}{2}\right)=(3;2)\neq P$, így az $x=3$ egyenes nem megoldása a feladatnak.

Ezek után feltehetjük, hogy $e : y=mx-3m-2$ alakú. Legyen $A_1 : e\cap f$, $B_1 := e\cap g$ az 1.6. ábrán látható módon.

$A_1 = e \cap f$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx - 3m - 2 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikba írva:

$$\begin{aligned} x + 3 \cdot (mx - 3m - 2) &= 6 \\ (3m + 1) \cdot x &= 9m + 12 \end{aligned}$$

$3m + 1 \neq 0$, azaz $\underline{m \neq -\frac{1}{3}}$, ekkor ugyanis az egyenletrendszernek nincs megoldása (ekkor $e \parallel f$ lenne). Ha viszont $3m + 1 \neq 0$, akkor a kapott egyenletből $x = \dfrac{9m + 12}{3m + 1}$ adódik. Visszaírva e egyenletébe:

$$y = m \cdot \frac{9m + 12}{3m + 1} - 3m - 2 = \frac{9m^2 + 12m - 9m^2 - 3m - 6m - 2}{3m + 1} = \frac{3m - 2}{3m + 1},$$

$\underline{\text{így } A_1 \left(\dfrac{9m + 12}{3m + 1}; \dfrac{3m - 2}{3m + 1} \right)}$.

$B_1 = e \cap g$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx - 3m - 2 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet a másodikba írva:

$$\begin{aligned} 2x - (mx - 3m - 2) &= 3 \\ (-m + 2) \cdot x &= -3m + 1 \end{aligned}$$

$-m + 2 \neq 0$, azaz $m \neq 2$, ekkor ugyanis az egyenletrendszernek nincs megoldása (ekkor $e \parallel g$ lenne). Ha viszont $-m + 2 \neq 0$, akkor a kapott egyenletből $x = \dfrac{3m - 1}{m - 2}$ adódik. Viszzaírva e egyenletébe:

$$y = m \cdot \frac{3m - 1}{m - 2} - 3m - 2 = \frac{3m^2 - m - 3m^2 + 6m - 2m + 4}{m - 2} = \frac{3m + 4}{m - 2},$$

$\underline{\text{így } B_1 \left(\dfrac{3m - 1}{m - 2}; \dfrac{3m + 4}{m - 2} \right)}$.

A feltétel szerint az $\overline{A_1 B_1}$ szakasz felezőpontja $P(3; -2)$. Amennyiben ez teljesül, úgy igaznak kell lennie a következő két egyenletnek:

$$\frac{\dfrac{9m + 12}{3m + 1} + \dfrac{3m - 1}{m - 2}}{2} = 3 \quad \text{és} \quad \frac{\dfrac{3m - 2}{3m + 1} + \dfrac{3m + 4}{m - 2}}{2} = -2.$$

Oldjuk meg először az első egyenletet:

$$\begin{aligned}\frac{(9m+12)(m-2)+(3m-1)(3m+1)}{(3m+1)(m-2)} &= 6\\ 9m^2-18m+12m-24+9m^2-1 &= 6\cdot(3m^2-6m+m-2)\\ 18m^2-6m-25 &= 18m^2-30m-12\\ 24m &= 13\\ m &= \frac{13}{24}.\end{aligned}$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ez megoldása a második kapott egyenletnek is, mely a kikötéseknek megfelel. A keresett egyenes tehát a következő: $\underline{\underline{e : y = \frac{13}{24}x - \frac{29}{8}}}$.

1.34. Feladat ([2] 3643)**.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(5;3)$ ponton, és a $3x+2y=16$ és a $3x+2y=11$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, melyek abszcisszáinak különbsége 1.

Megoldás. Legyen $f : 3x+2y=16$ és $g : 3x+2y=11$. Keressük az e egyenes egyenletét, melyre $P(5;3)\in e$ teljesül. Ismét az iránytényezős alakkal érdemes dolgozni. A keresett egyenes egyenlete $e : x=5$ vagy $e : y-3=m(x-5)$ alakú.

A feladatot az $x=5$ egyenes biztosan nem oldja meg, hiszen ekkor az f-fel, illetve g-vel vett metszéspontok mindkét abszcisszája 5, így az abszcisszák különbsége 0.

e egyenlete tehát $e : y = mx-5m+3$ alakú. Legyen $A := e\cap f$, $B := e\cap g$.

$A = e\cap f$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert kellene megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx-5m+3\\ 3x+2y &= 16\end{aligned}\right\}$$

Vegyük észre, hogy most csak a kérdéses metszéspontok első koordinátáira van szükségünk, azaz y meghatározása nélkül elegendő x-et kiszámolnunk. Az első egyenletet a másodikba írva:

$$\begin{aligned}3x+2\cdot(mx-5m+3) &= 16\\ (2m+3)\cdot x &= 10m+10\end{aligned}$$

$2m+3\neq 0$, azaz $\underline{m\neq -\frac{3}{2}}$, ellenkező esetben az egyenletrendszernek nincs megoldása (ekkor $e\parallel f$ teljesülne). Ha viszont $2m+3\neq 0$, akkor a kapott egyenletből $\underline{x=\frac{10m+10}{2m+3}}$ következik.

$B = e\cap g$ meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert kellene megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx-5m+3\\ 3x+2y &= 11\end{aligned}\right\}$$

Ismét elegendő x-et kiszámolnunk. Az első egyenletet a másodikba írva:

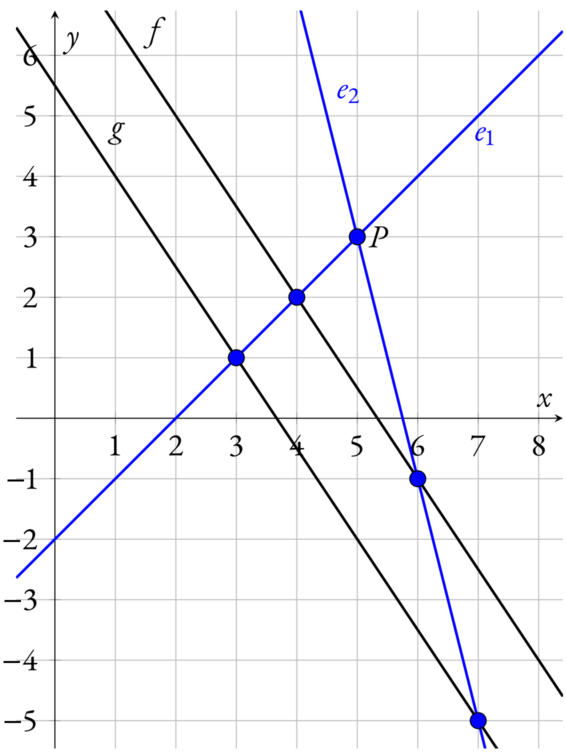
$$\begin{aligned}3x+2\cdot(mx-5m+3) &= 11\\ (2m+3)\cdot x &= 10m+5\end{aligned}$$

$2m+3 \neq 0$, azaz $\underline{m \neq -\frac{3}{2}}$, ellenkező esetben az egyenletrendszernek nincs megoldása (ekkor $e \parallel g$ teljesülne).
Ha viszont $2m+3 \neq 0$, akkor a kapott egyenletből $\underline{x = \frac{10m+5}{2m+3}}$ következik.

A feltétel szerint A és B abszcisszáinak különbsége 1, vagyis felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} \left|\frac{10m+10}{2m+3} - \frac{10m+5}{2m+3}\right| &= 1 \\ \frac{5}{|2m+3|} &= 1 \\ 5 &= |2m+3| \end{aligned}$$

Ebből $2m+3 = 5$ vagy $2m+3 = -5$ következik, amiből $m_1 = 1$; $m_2 = -4$ adódik. Két lehetséges megoldást kaptunk: $\underline{\underline{e_1 : y = x - 2}}$, $\underline{\underline{e_2 : y = -4x + 23}}$, melyeket az 1.7. ábrán ábrázoltunk.



1.7. ábra

Emlék. Ha $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, akkor az $\overline{AB}$ szakaszt $n : m$ arányban osztó P pont koordinátái

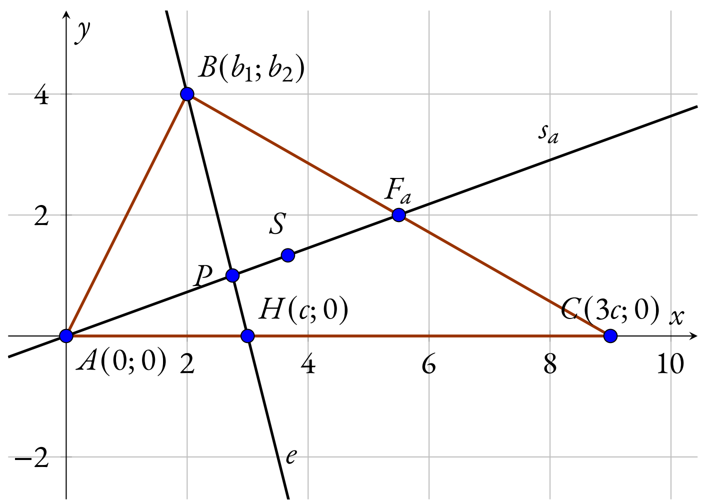
$$P\left(\frac{ma_1 + nb_1}{n+m}; \frac{ma_2 + nb_2}{n+m}\right).$$

Emlék. Ha $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, akkor az ABC háromszög súlypontjának koordinátái

$$S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

1.35. Feladat ([2] 3649). Az ABC háromszög B csúcsát összekötjük az $\overline{AC}$ oldal A-hoz közelebbi harmadolópontjával. Az így kapott szakasz és az A-ból induló súlyvonal metszéspontját jelölje P, a háromszög súlypontját S. Milyen arányban osztja P az $\overline{AS}$ szakaszt?

Megoldás. Helyezzük el a háromszöget az általánosság megszorítása nélkül kényelmes helyzetben a koordinátarendszerben, és számítsuk ki a szóban forgó pontok koordinátáit. Tekintsük az 1.8. ábrát: legyen $A(0;0)$, $B(b_1;b_2)$, $C(3c;0)$, az $\overline{AC}$ szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja $H(c;0)$.



1.8. ábra

A $\overline{BC}$ szakasz F_a felezőpontja ekkor $F_a\left(\frac{b_1+3c}{2};\frac{b_2}{2}\right)$. Az AF_a súlyvonal legyen s_a. Ekkor s_a egy irányvektora: $\mathbf{v}_{s_a} = \overrightarrow{AF_a} = \mathbf{f}_a - \mathbf{a} = \left(\frac{b_1+3c}{2};\frac{b_2}{2}\right)$, így egy normálvektora $\mathbf{n}_{s_a} = \left(\frac{b_2}{2};-\frac{b_1+3c}{2}\right)$, illetve $\mathbf{n}'_{s_c} = (b_2;-b_1-3c)$. Mivel $A(0;0) \in s_a$, ezért s_a egyenlete: $\underline{s_a : b_2x + (-b_1-3c)y = 0}$.

Legyen a BH egyenes e. Ekkor e egy irányvektora: $\mathbf{v}_e = \overrightarrow{BH} = \mathbf{h} - \mathbf{b} = (c-b_1;-b_2)$, amiből egy normálvektora $\mathbf{n}_e = (b_2;c-b_1)$. Mivel $H(c;0) \in e$, ezért e egyenlete: $\underline{e : b_2x + (c-b_1)y = b_2c}$.

$P = s_a \cap e$. P koordinátáinak meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} b_2x + (-b_1-3c)y &= 0 \\ b_2x + (c-b_1)y &= b_2c \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletből kivonva az elsőt:

$$\begin{aligned} (c-b_1+b_1+3c)y &= b_2c \\ 4c\cdot y &= b_2c \\ y &= \frac{b_2}{4} \end{aligned}$$

Az utolsó átalakításban oszthattunk c-vel, hiszen most $c \neq 0$, mivel A és H nem esnek egybe. Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} b_2x + (-b_1 - 3c) \cdot \frac{b_2}{4} &= 0 \\ x &= \frac{b_1 + 3c}{4} \end{aligned}$$

Az egyenlet rendezése során b_2-vel oszthattunk, hiszen most $b_2 \neq 0$, mivel B nincs rajta az AC egyenesen.

Azt kaptuk tehát, hogy $P\left(\frac{b_1+3c}{4}; \frac{b_2}{4}\right)$. Másfelől az ABC háromszög súlypontja $S\left(\frac{b_1+3c}{3}; \frac{b_2}{3}\right)$, illetve $A(0;0)$. Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés szerint kapjuk, hogy P az AS szakasz S-hez közelebbi negyedelőpontja, vagyis P az $\overline{AS}$ szakaszt $\underline{\underline{3:1 \text{ arányban}}}$ osztja.

1.36. Feladat ([2] 3653). Az ABC egyenlő szárú háromszögben $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$. Az A csúcs koordinátái $(-2;1)$, a C csúcs koordinátái $(4;3)$. A B csúcs az $x + 2y = 10$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Számítsuk ki a B csúcs koordinátáit!

Megoldás. Legyen B második koordinátája b, ekkor mivel B rajta van az $x + 2y = 10$ egyenletű egyenesen, B első koordinátája $10 - 2b$, azaz $B(10 - 2b; b)$. Az $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$ feltételt felírva b-re vonatkozó egyenletet kapunk:

$$\sqrt{(-2-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(10-2b-4)^2 + (b-3)^2}.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, emelhetünk négyzetre:

$$\begin{aligned} 40 &= (6-2b)^2 + (b-3)^2 \\ 40 &= 36 - 24b + 4b^2 + b^2 - 6b + 9 \\ 0 &= 5b^2 - 30b + 5 \\ 0 &= b^2 - 6b + 1 \end{aligned}$$

Az egyenletet megoldva $b_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $b_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ adódik. B első koordinátáit is kiszámolva kapjuk, hogy két megoldás lehetséges: $\underline{\underline{B_1\left(4 - 4\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right)}}$, illetve $\underline{\underline{B_2\left(4 + 4\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\right)}}$.

1.1.3. Párhuzamos és merőleges egyenesek

Egyenesek párhuzamossága/merőlegessége egyszerűen megragadható az egyenesek koordinátageometriai jellemzőivel. A definíciókból egyszerűen következik, hogy (a szokásos jelöléseket használva)

- e pontosan akkor párhuzamos f-fel, ha
  - $\mathbf{v}_e \parallel \mathbf{v}_f \iff \mathbf{v}_e = \lambda \cdot \mathbf{v}_f$ valamely $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén;
  - $\mathbf{n}_e \parallel \mathbf{n}_f \iff \mathbf{n}_e = \lambda \cdot \mathbf{n}_f$ valamely $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén;
- e pontosan akkor merőleges f-re, ha
  - $\mathbf{v}_e \perp \mathbf{v}_f \iff \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_f = 0$;

– $\mathbf{n}_e \perp \mathbf{n}_f \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{n}_f = 0$.

A meredekségek segítségével még egyszerűbb feltételeket nyerhetünk. Egyfelől e és f egyenesnek sincs meredeksége, akkor $e \parallel f$ (és mindkettő párhuzamos az y-tengellyel), másfelől ha e-nek nincs meredeksége és f meredeksége 0 (vagy fordítva), akkor $e \perp f$.

Tegyük fel ezután, hogy e és f meredeksége is létezik. Ekkor, ha $\mathbf{v}_e(v_1; v_2)$, $\mathbf{v}_f(v_3; v_4)$, akkor a meredekségek $m_e = \frac{v_2}{v_1}$, illetve $m_f = \frac{v_4}{v_3}$.

Ha most $e \parallel f$, akkor $\mathbf{v}_e = \lambda \cdot \mathbf{v}_f$ valamely $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén, így

$$m_e = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda v_4}{\lambda v_3} = \frac{v_4}{v_3} = m_f.$$

Gondolatmenetünk megfordítható, így a következő állítást kaptuk.

1.37. Állítás. e és f egyenesek pontosan akkor párhuzamosak egymással, ha $m_e = m_f$ vagy egyik egyenes meredeksége sem létezik.

Ha $e \perp f$, akkor $\mathbf{v_e} \cdot \mathbf{v}_f = 0$, amiből

$$\begin{aligned} v_1v_3 + v_2v_4 &= 0 \\ v_1v_3 &= -v_2v_4 \\ 1 &= -\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_4}{v_3} \\ -1 &= m_e \cdot m_f \end{aligned}$$

Átalakításaink ekvivalensek, így a következő állítást igazoltuk.

1.38. Állítás. e és f egyenesek pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $m_e \cdot m_f = -1$ vagy egyik egyenes meredeksége nem létezik, a másik egyenes meredeksége pedig 0.

1.39. Feladat ([2] 3677)**.** Az $ax + by = a^2 + b^2$ egyenletű egyenesre az origóból merőlegest állítunk. Számítsuk ki a merőleges talppontjának koordinátáit, ha $ab \neq 0$.

Megoldás. Legyen $f : ax + by = a^2 + b^2$, a keresett egyenes e. f egy normálvektora $\mathbf{n}_f = (a; b)$. Mivel $e \perp f$, ezért $\mathbf{n}_e \perp \mathbf{n}_f$, így például $\mathbf{n}_e = (b; -a)$. Mivel $(0; 0) \in e$, ezért $\overline{e : bx - ay = 0}$.

A keresett talppont: $T = e \cap f$, így megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= a^2 + b^2 \\ bx - ay &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Mivel a feltétel szerint $a \neq 0$, $b \neq 0$, ezért az első egyenletet szorozzuk b-vel, a második egyenletet a-vel:

$$\left.\begin{aligned} abx + b^2y &= a^2b + b^3 \\ abx - a^2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

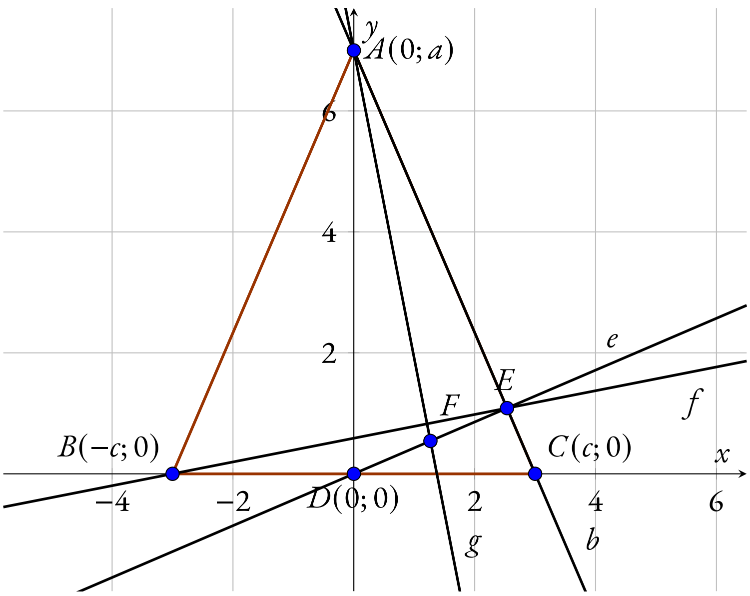
Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot y = b\cdot\left(a^2+b^2\right)$$
$$y = b$$

Az utolsó lépésben a^2+b^2-tel oszthattunk, mert nem lehet $a=b=0$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $x=a$. A keresett talppont koordinátái tehát $\underline{\underline{T(a;b)}}$.

1.40. Feladat ([2] 3701)**.** Az ABC háromszögben $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right|$. Jelölje D a $\overline{BC}$ oldal felezőpontját, a D-ből induló és az AC-re merőleges egyenes talppontját E, végül F a $\overline{DE}$ szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy $AF \perp BE$.

Megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben az 1.9. ábrán látható módon: a háromszög csúcsai $A(0;a)$, $B(-c;0)$, $C(c;0)$, ahol $a>0$, $c>0$. Ekkor a $\overline{BC}$ oldal felezőpontja $D(0;0)$. Célunk megmutatni, hogy $f \perp g$: ehhez elegendő megmutatni, hogy például irányvektoraik merőlegesek egymásra.



1.9. ábra

Először b egyenletére van szükségünk. b egy irányvektora: $\mathbf{v}_b = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}-\mathbf{a} = (c;-a)$, amiből egy normálvektora: $\mathbf{n}_b = (a;c)$. Mivel $A(0;a)\in b$, ezért $\underline{b: ax+cy=ac}$.

Mivel $e\perp b$, ezért $\mathbf{n}_e = (c;-a)$. Mivel $D(0;0)\in e$, ezért $\underline{e: cx-ay=0}$.

$E = b\cap e$, így E meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} ax+cy &= ac \\ cx-ay &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet c-vel, a második egyenletet a-val szorozva:

$$\left.\begin{aligned} acx+c^2y &= ac^2 \\ acx-a^2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A felső egyenletből kivonva az alsót:

$$\begin{aligned}\left(a^2+c^2\right)\cdot y &= ac^2\\ y &= \frac{ac^2}{a^2+c^2}\end{aligned}$$

Az osztást megtehettük, hiszen most $a \neq 0$, $c \neq 0$. Visszatérve az első egyenletre:

$$\begin{aligned}ax + c\cdot\frac{ac^2}{a^2+c^2} &= ac\\ x &= c - \frac{c^3}{a^2+c^2}\\ x &= \frac{a^2c+c^3-c^3}{a^2+c^2}\\ x &= \frac{a^2c}{a^2+c^2}\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\underline{E\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}; \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)}$.

F a $\overline{DE}$ szakasz felezőpontja, így $\underline{F\left(\frac{a^2c}{2\left(a^2+c^2\right)}; \frac{ac^2}{2\left(a^2+c^2\right)}\right)}$.

Ezek után az f egyenes egy irányvektora:

$$\mathbf{v}_f = \overrightarrow{BE} = \mathbf{e}-\mathbf{b} = \left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}+c; \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right) = \left(\frac{2a^2c+c^3}{a^2+c^2}; \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right),$$

illetve $\mathbf{v}_f' = \left(2a^2+c^2; ac\right)$.

A g egyenes egy irányvektora:

$$\mathbf{v}_g = \overrightarrow{AF} = \mathbf{f}-\mathbf{a} = \left(\frac{a^2c}{2\left(a^2+c^2\right)}; \frac{ac^2}{2\left(a^2+c^2\right)} - a\right) = \left(\frac{a^2c}{2\left(a^2+c^2\right)}; \frac{-2a^3-ac^2}{2\left(a^2+c^2\right)}\right),$$

illetve $\mathbf{v}_g' = \left(ac; -2a^2-c^2\right)$.

Végül

$$\mathbf{v}_f'\cdot\mathbf{v}_g' = \left(2a^2+c^2\right)\cdot ac + ac\cdot\left(-2a^2-c^2\right) = 0,$$

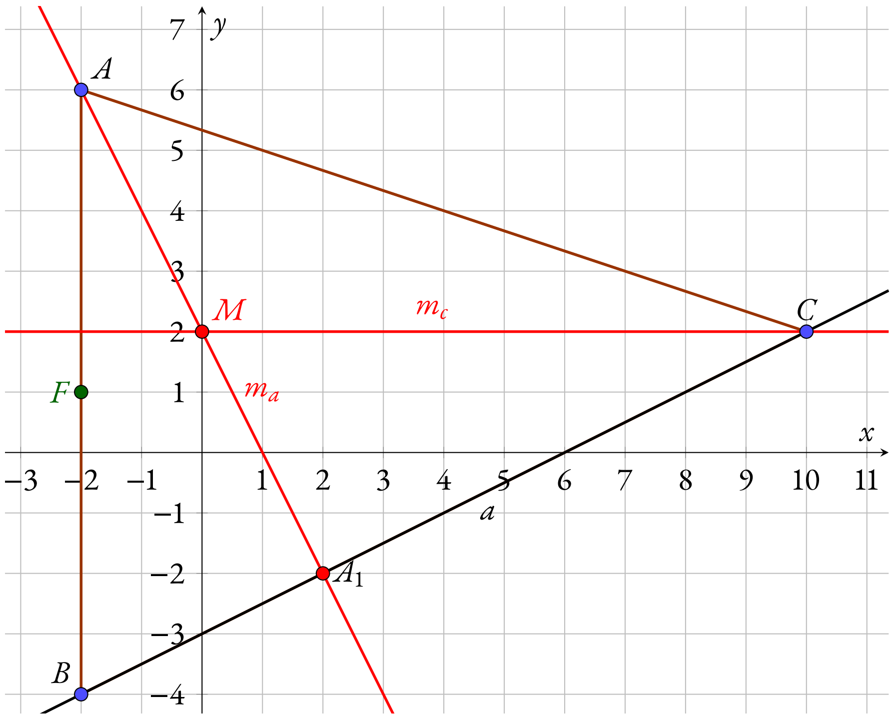
ami éppen azt jelenti, hogy $f \perp g$.

1.41. Feladat ([2] 3713)**.** Az ABC háromszög magasságpontja $M(0;2)$, az $\overline{AB}$ oldal felezőpontja $F(-2;1)$, az $\overline{AM}$ magasságnak a $\overline{BC}$ oldalra eső talppontja $A_1(2;-2)$. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit.

Megoldás. Tekintsük az 1.10. ábra jelöléseit.

Érdemes megragadnunk a háromszög valamely csúcsát egyetlen paraméter segítségével. Mivel $A \in m_a$, és m_a egyenletét fel tudjuk írni, ezért érdemes ezzel próbálkoznunk.

Az m_a egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_{m_a} = \overrightarrow{MA_1} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{m} = (2;-4)$, illetve $\mathbf{v}_{m_a}' = (1;-2)$. Ebből m_a egy normálvektora: $\mathbf{n}_{m_a} = (2;1)$. Mivel $M(0;2) \in m_a$, ezért $m_a: 2x+y = 2\cdot 0 + 1\cdot 2$, vagyis $\underline{m_a: 2x+y=2}$.



1.10. ábra

Mivel $A \in m_a$, ezért ha például A első koordinátája a, akkor második koordinátája $2 - 2a$, vagyis $A(a; 2-2a)$ alakú.

Legyen $B(b_1; b_2)$. Mivel $F(-2; 1)$ az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja, ezért

$$\frac{a+b_1}{2} = -2 \quad \text{és} \quad \frac{2-2a+b_2}{2} = 1.$$

Ebből $b_1 = -4 - a$, $b_2 = 2a$, azaz $B(-4-a; 2a)$.

Ennél többet direktben nem tudunk kiszámolni, ugyanakkor tudjuk, hogy $\overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{BA_1}$. Emiatt skaláris szorzatuk 0, és felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}_1 - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}) &= 0 \\
(2; -4) \cdot (6 + a; -2 - 2a) &= 0 \\
2 \cdot (6 + a) + (-4) \cdot (-2 - 2a) &= 0 \\
12 + 2a + 8 + 8a &= 0 \\
10a &= -20 \\
a &= -2
\end{aligned}$$

Eszerint $A(-2; 6)$, illetve $B(-2; -4)$.

A C csúcs előáll, mint az m_c magasságvonal és az a egyenes metszéspontja, és ezen egyenesek egyenletét már fel tudjuk írni. a egy irányvektora: $\mathbf{v}_a = \overrightarrow{BA_1} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{b} = (2; -2) - (-2; -4) = (4; 2)$, illetve $\mathbf{v}'_a = (2; 1)$. Innen a egy normálvektora: $\mathbf{n}_a = (1; -2)$. Mivel $A_1(2; -2) \in a$, ezért $a : x - 2y = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2)$, vagyis $a : x - 2y = 6$.

m_c egy normálvektora: $\mathbf{n}_{m_c} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2;-4) - (-2;6) = (0;-10)$, illetve $\mathbf{n}'_{m_c} = (0;1)$. Mivel $M(0;2) \in m_c$, ezért $\underline{m_c : y = 2}$.

Célegyenes: $C = a \cap m_c$, így megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve: $x - 2 \cdot 2 = 6$, amiből $x = 10$. Azt kaptuk tehát, hogy $\underline{\underline{C(10;2)}}$.

1.1.4. Pont és egyenes távolsága

Emlék. Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

Ennek megfelelően járhatunk el, ha a koordinátarendszerben szeretnénk meghatározni adott pont és egyenes távolságát. Legyen adott egy $e : Ax + By = C$ egyenes és egy $P(x_0;y_0)$ pont. Legyen a P-n átmenő, e-re merőleges egyenes f. Ekkor $\mathbf{n}_e = (A;B)$, amiből $\mathbf{n}_f = (B;-A)$. Mivel $P(x_0;y_0) \in f$, ezért $\underline{f : Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0}$.

Legyen $P_0 := f \cap e$. Ekkor megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By &= C \\ Bx - Ay &= Bx_0 - Ay_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Az első egyenletet A-val, a másodikat B-vel szorozva:

$$\left.\begin{aligned} A^2x + ABy &= AC \\ B^2x - ABy &= B^2x_0 - ABy_0 \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze a kapott két egyenletet:

$$\left(A^2 + B^2\right)x = AC + B^2x_0 - ABy_0.$$

Mivel egyenes egyenletéről van szó, $A^2 + B^2 \neq 0$, így oszthatunk vele:

$$x = \frac{AC + B^2x_0 - ABy_0}{A^2 + B^2}.$$

Térjünk vissza az (1.3) egyenletrendszerhez, és most szorozzuk az első egyenletet B-bel, a második egyenletet A-val:

$$\left.\begin{aligned} ABx + B^2y &= BC \\ ABx - A^2y &= ABx_0 - A^2y_0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\left(A^2 + B^2\right)y = BC - ABx_0 + A^2y_0,$$

amiből ismét az $A^2 + B^2 \neq 0$ kifejezéssel történő osztással

$$y = \frac{BC - ABx_0 + A^2y_0}{A^2 + B^2}$$

adódik. Eszerint tehát $P_0\left(\dfrac{AC+B^2x_0-ABy_0}{A^2+B^2};\dfrac{BC-ABx_0+A^2y_0}{A^2+B^2}\right)$.

P és e távolsága ekkor P és P_0 távolságával egyezik meg, vagyis

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(P;e)=\mathrm{d}(P;P_0)&=\sqrt{\left(x_0-\frac{AC+B^2x_0-ABy_0}{A^2+B^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{BC-ABx_0+A^2y_0}{A^2+B^2}\right)^2}=\\
&=\sqrt{\left(\frac{A^2x_0+B^2x_0-AC-B^2x_0+ABy_0}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{A^2y_0+B^2y_0-BC+ABx_0-A^2y_0}{A^2+B^2}\right)^2}=\\
&=\sqrt{\left(\frac{A\left(Ax_0+By_0-C\right)}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{B\left(Ax_0+By_0-C\right)}{A^2+B^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(A^2+B^2)\cdot\left(Ax_0+By_0-C\right)^2}{(A^2+B^2)^2}}=\\
&=\frac{\left|Ax_0+By_0-C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.
\end{aligned}$$

Igazoltuk a következő állítást.

1.42. Állítás. A $P(x_0;y_0)$ pont távolsága az $e: Ax+By=C$ $(A^2+B^2\neq 0)$ egyenestől:

$$\mathrm{d}(P;e)=\frac{\left|Ax_0+By_0-C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

1.43. Megjegyzés. Az egyenes $Ax+By=C$ egyenlete mindig

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \tag{1.4}$$

alakra hozható, hiszen $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$ (ez a mennyiség éppen az egyenes egy $(A;B)$ normálvektorának hossza). Az így kapott egyenletben az egyenes egy olyan normálvektora szerepel, melynek hossza egységnyi. Az (1.4) egyenletet az egyenes *normálegyenletének* szokás nevezni.

Összevetve ezt a kapott formulával, a következőt is mondhatjuk: P és e távolságát megkapjuk, ha P koordinátáit e normálegyenletének bal oldalába helyettesítjük, majd a kapott kifejezés abszolútértékét vesszük.

Abszolútérték nélkül egyébként P és e *előjeles távolságát* kapjuk meg. Ez a távolság pozitív, ha P az e által meghatározott azon félsíkban van, mely felé az $(A;B)$ normálvektor mutat, e távolság negatív, ha P az e által meghatározott másik félsíkban van, végül éppen 0, ha $P\in e$.

1.44. Feladat ([2] 3769). Bizonyítsuk be, hogy a $3x-4y+4=0$ egyenletű egyenes a sík bármely rácspontjától racionális távolságra van.

Megoldás. Legyen a sík tetszőleges rácspontja $P(n;m)$, ahol $n;m\in\mathbb{Z}$. A szóban forgó e egyenes normálegyenlete:

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{4}{5}=0.$$

Ekkor $\mathrm{d}(P;e)=\left|\dfrac{3}{5}n-\dfrac{4}{5}m+\dfrac{4}{5}\right|$. Mivel $n;m\in\mathbb{Z}$, a racionális számok halmaza az összeadásra, szorzásra, kivonásra nézve zárt, továbbá racionális szám abszolútértéke is racionális, ezért ez a távolság is mindig racionális.

1.45. Feladat ([2] 3771. a)). Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $x - y = 6$ egyenletű egyenessel, és az origótól 6 egység távolságra vagy $2\sqrt{6}$ egység távolságra halad!

Megoldás. Legyen a keresett egyenes egyenlete $e : x - y = C$ alakú. Ekkor e normálegyenlete:

$$e : \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{C}{\sqrt{2}} = 0.$$

Amennyiben e az origótól 6 egység távolságra halad, úgy

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{C}{\sqrt{2}}\right| &= 6 \\ |C| &= 6\sqrt{2}, \end{aligned}$$

amiből $C_1 = 6\sqrt{2}$ vagy $C_2 = -6\sqrt{2}$.

Ha e az origótól $2\sqrt{6}$ egység távolságra halad, úgy

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{C}{\sqrt{2}}\right| &= 2\sqrt{6} \\ |C| &= 2\sqrt{12}, \end{aligned}$$

amiből $C_3 = 4\sqrt{3}$ vagy $C_4 = -4\sqrt{3}$.

Négy lehetséges egyenest kaptunk tehát, melyek egyenletei:

$$\underline{\underline{e_1 : x - y = 6\sqrt{2}}}; \quad \underline{\underline{e_2 : x - y = -6\sqrt{2}}}; \quad \underline{\underline{e_3 : x - y = 4\sqrt{3}}}; \quad \underline{\underline{e_4 : x - y = -4\sqrt{3}.}}$$

1.46. Feladat. [[2] 3773] Fektessünk a $(-1; 2)$ ponton át egyenest, amely a $(6; 1)$ ponttól 5 egység távolságra van. Írjuk fel az egyenes egyenletét!

Megoldás. Legyen a keresett egyenes egyenlete $e : Ax + By = C$. Feladatunk meghatározni az A; B; C valós paramétereket.

Mivel $A(-1; 2) \in e$, ezért $\underline{-A + 2B = C}$.

Tudjuk továbbá, hogy a $B(6; 1)$ pont 5 egység távolságra van e-től, így

$$\underline{\left|\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot 6 + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot 1 - \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = 5.}$$

Ez idáig két egyenlet. Ugyanakkor feltehetjük, hogy $\underline{A^2 + B^2 = 1}$, vagyis az e egyenletében szereplő normálvektor egységnyi hosszúságú. Ez nemcsak a második kapott egyenleten egyszerűsít, hanem további összefüggést határoz meg két ismeretlen között. Eszerint a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\left.\begin{aligned} -A + 2B &= C \\ |6A + B - C| &= 5 \\ A^2 + B^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert. Az első egyenletből kifejezett C-t a második egyenletbe írjuk:

$$\begin{aligned} |6A + B + A - 2B| &= 5 \\ |7A - B| &= 5 \end{aligned}$$

Esetszétválasztással dolgozunk tovább.

1. eset: $7A - B = 5$, vagyis $B = 7A - 5$. Írjuk ezt be az (1.5) egyenletrendszer harmadik egyenletébe:

$$\begin{aligned} A^2 + (7A-5)^2 &= 1 \\ A^2 + 49A^2 - 70A + 25 &= 1 \\ 50A^2 - 70A + 24 &= 0 \\ 25A^2 - 35A + 12 &= 0 \end{aligned}$$

A másodfokú egyenletet megoldva $A_1 = \frac{3}{5}$ vagy $A_2 = \frac{4}{5}$.

(a) Ha $A_1 = \frac{3}{5}$, akkor $B = 7 \cdot \frac{3}{5} - 5 = -\frac{4}{5}$, illetve (1.5) első egyenletéből $C = -\frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{11}{5}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_1 : \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = -\frac{11}{5}$, azaz $\underline{\underline{e_1 : 3x - 4y = -11}}$.

(b) Ha $A_2 = \frac{4}{5}$, akkor $B = 7 \cdot \frac{4}{5} - 5 = \frac{3}{5}$, illetve (1.5) első egyenletéből $C = -\frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_2 : \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{2}{5}$, azaz $\underline{\underline{e_2 : 4x + 3y = 2}}$.

2. eset: $7A - B = -5$, vagyis $B = 7A + 5$. Írjuk ezt be az (1.5) egyenletrendszer harmadik egyenletébe:

$$\begin{aligned} A^2 + (7A+5)^2 &= 1 \\ A^2 + 49A^2 + 70A + 25 &= 1 \\ 50A^2 + 70A + 24 &= 0 \\ 25A^2 + 35A + 12 &= 0 \end{aligned}$$

A másodfokú egyenletet megoldva $A_3 = -\frac{4}{5}$ vagy $A_4 = -\frac{3}{5}$.

(a) Ha $A_3 = -\frac{4}{5}$, akkor $B = -7 \cdot \frac{4}{5} + 5 = -\frac{3}{5}$, illetve (1.5) első egyenletéből $C = \frac{4}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_3 : -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = -\frac{2}{5}$, azaz az előző ág e_2 egyenesét kapjuk.

(b) Ha $A_4 = -\frac{3}{5}$, akkor $B = -7 \cdot \frac{3}{5} + 5 = \frac{4}{5}$, illetve (1.5) első egyenletéből $C = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_2 : -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{11}{5}$, azaz az előző ág e_1 egyenesét kapjuk.

A feladatnak tehát két két megoldása van, a fentebbi e_1, illetve e_2 egyenesek.

1.47. Feladat ([2] 3779)**.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 5)$ ponton, és az $A(5; 3)$ ponttól kétszer akkora távolságra van, mint a $B(-1; 0)$ ponttól.

Megoldás. Legyen a keresett egyenes egyenlete $e : Ax + By = C$ alakú. Az 1.46. fealdat megoldásához hasonlóan itt is eleve feltesszük, hogy $\underline{A^2 + B^2 = 1}$.

Mivel $P(2; 5) \in e$, ezért $\underline{2A + 5B = C}$ is teljesül.

Végül a távolságfeltétel szerint a harmadik egyenletünk:

$$\underline{|5A + 3B - C| = 2 \cdot |-A - C|}.$$

A következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 5B &= C \\ |5A + 3B - C| &= 2 \cdot |A + C| \\ A^2 + B^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Az első egyenletből C-t a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} |5A + 3B - 2A - 5B| &= |2| \cdot |A + 2A + 5B| \\ |3A - 2B| &= |6A + 10B| \end{aligned}$$

Két szám abszolútértéke megegyezik, ha a két szám megegyezik, vagy a számok egymás ellentettjei. Ennek megfelelően két eset van.

1. eset: $3A - 2B = 6A + 10B$, amiből $3A = -12B$, azaz $A = -4B$. Beírva ezt az (1.6) egyenletrendszer harmadik egyenletébe: $17B^2 = 1$, amiből $B_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$ vagy $B_2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

   (a) Ha $B_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$, akkor $A_1 = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, illetve (1.6) első egyenletéből $C_1 = -2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+5\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{3}{\sqrt{17}}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_1 : -\frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{1}{\sqrt{17}}y = -\frac{3}{\sqrt{17}}$, azaz $\underline{\underline{e_1 : -4x + y = -3}}$.

   (b) Ha $B_2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, akkor $A_2 = \frac{4}{\sqrt{17}}$, illetve (1.6) első egyenletéből $C_2 = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - 5\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_2 : \frac{4}{\sqrt{17}}x - \frac{1}{\sqrt{17}}y = \frac{3}{\sqrt{17}}$, azaz ugyanazt a megoldást kapjuk, mint az előző ág e_1 egyenese.

2. eset: $3A - 2B = -6A - 10B$, amiből $9A = -8B$, azaz $A = -\frac{8}{9}B$. Beírva ezt az (1.6) egyenletrendszer harmadik egyenletébe: $\frac{145}{81}B^2 = 1$, amiből $B_3 = \frac{9}{\sqrt{145}}$ vagy $B_4 = -\frac{9}{\sqrt{145}}$.

   (a) Ha $B_3 = \frac{9}{\sqrt{145}}$, akkor $A_3 = -\frac{8}{\sqrt{145}}$, illetve (1.6) első egyenletéből $C_3 = -2\cdot\frac{8}{\sqrt{145}}+5\cdot\frac{9}{\sqrt{145}} = \frac{29}{\sqrt{145}}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_3 : -\frac{8}{\sqrt{145}}x+\frac{9}{\sqrt{145}}y = \frac{29}{\sqrt{145}}$, azaz $\underline{\underline{e_3 : -8x + 9y = 29}}$.

   (b) Ha $B_4 = -\frac{9}{\sqrt{145}}$, akkor $A_4 = \frac{8}{\sqrt{145}}$, illetve (1.6) első egyenletéből $C_4 = 2\cdot\frac{8}{\sqrt{145}} - 5\cdot\frac{9}{\sqrt{145}} = -\frac{29}{\sqrt{145}}$. A megfelelő egyenes egyenlete: $e_4 : \frac{8}{\sqrt{145}}x - \frac{9}{\sqrt{145}}y = -\frac{29}{\sqrt{145}}$, azaz ugyanazt a megoldást kapjuk, mint az előző ág e_3 egyenese.

A feladatnak tehát két megoldása van, a fentebbi e_1, illetve e_3 egyenesek.

1.1.5. Párhuzamos egyenesek távolsága

Emlék. Párhuzamos egyenesek távolsága valamelyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága.

Ennek alapján kiszámíthatjuk egyenleteikkel adott párhuzamos egyenesek távolságát is. Legyen $e: Ax + By = C$, illetve $f: Ax + By = D$ két párhuzamos egyenes a síkon ($A^2 + B^2 \neq 0$).

- Ha $B \neq 0$, akkor az f egyenesre illeszkedik a $P\left(0; \dfrac{D}{B}\right)$ pont. Ekkor a korábbiak szerint

$$\mathrm{d}(e;f) = \mathrm{d}(e;P) = \frac{\left|A \cdot 0 + B \cdot \dfrac{D}{B} - C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- Ha $B = 0$, akkor $A \neq 0$, és $e: x = \dfrac{C}{A}$, $f: x = \dfrac{D}{A}$ az y-tengellyel párhuzamos egyenesek. Ekkor egyszerűen

$$\mathrm{d}(e;f) = \left|\frac{C}{A} - \frac{D}{A}\right| = \frac{|C - D|}{|A|} = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + 0^2}} = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Mindkét esetben a következő állítást kapjuk.

1.48. Állítás. Az $e: Ax + By = C$ és az $f: Ax + By = D$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) párhuzamos egyenesek távolsága

$$\mathrm{d}(e;f) = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.49. Feladat ([1] 197/3)**.** Számítsuk ki a $12x - 5y = 1$ és a $12x - 5y = -12$ egyenesek távolságát!

Megoldás. A felírt formulát alkalmazva:

$$\underline{\underline{\mathrm{d}(e;f)}} = \frac{|1 - (-12)|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \underline{\underline{1}}.$$

1.2. A kör koordinátageometriája

1.2.1. A kör egyenlete

Emlék. A kör azon pontok halmaza a síkon, melynek a sík egy adott pontjától mért távolsága állandó. Az adott pont a kör *középpontja*, az adott távolság a kör *sugara*.

Ennek megfelelően, legyen most a koordinátarendszerben egy kör középpontja $K(u;v)$, sugara $r > 0$. Ekkor a körön pontosan azon $P(x;y)$ pontok vannak rajta, melyekre $\mathrm{d}(P;K) = r$, azaz

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, emelhetünk négyzetre. A következő állítást kapjuk:

1.50. Állítás. A $K(u;v)$ középpontú, $r>0$ sugarú kör egyenlete

$$(x-u)^2+\left(y-v\right)^2=r^2.$$

1.51. Feladat ([2] 3827)**.** Egy kör átmérőjének végpontjai

a) $(1;1)$, $(5;-1)$; b) $(4;1)$, $(2;3)$; c) $(-5;4)$, $(3;2)$; d) $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{4}\right)$, $(-3;5)$.

Írjuk fel a kör egyenletét!

Megoldás. a) Legyen $A(1;1)$, $B(5;-1)$. A kör középpontjának koordinátái legyenek $K(u;v)$. A kör középpontja az ármérő felezőpontja, így $u=\dfrac{1+5}{2}=3$; $v=\dfrac{1-1}{2}=0$, azaz $\underline{K(3;0)}$. A kör sugara: $\underline{r=}\left|\overline{KA}\right|=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\underline{\sqrt{5}}$. Eszerint a kör egyenlete: $\underline{\underline{k:(x-3)^2+y^2=5}}$.

b) Legyen $A(4;1)$, $B(2;3)$. Ha a kör középpontja $K(u;v)$, akkor az előzőekhez hasonlóan $u=\dfrac{4+2}{2}=3$; $v=\dfrac{1+3}{2}=2$, azaz $\underline{K(3;2)}$. A kör sugara: $\underline{r=}\left|\overline{KA}\right|=\sqrt{(3-4)^2+(2-1)^2}=\underline{\sqrt{2}}$. Így a kör egyenlete: $\underline{\underline{k:(x-3)^2+(y-2)^2=2}}$.

c) Legyen $A(-5;4)$, $B(3;2)$. Az előzőekhez hasonlóan a kör $K(u;v)$ középpontjára $u=\dfrac{-5+3}{2}=-1$, $v=\dfrac{4+2}{2}=3$, azaz $\underline{K(-1;3)}$. A kör sugara: $\underline{r=}\left|\overline{KA}\right|=\sqrt{(-1-(-5))^2+(3-4)^2}=\underline{\sqrt{17}}$, azaz a kör egyenlete: $\underline{\underline{k:(x+1)^2+(y-3)^2=17}}$.

d) Legyen $A\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{4}\right)$, $B(-3;5)$. A kör $K(u;v)$ középpontjára $u=\dfrac{\frac{2}{3}-3}{2}=-\dfrac{7}{6}$, $v=\dfrac{-\frac{1}{4}+5}{2}=\dfrac{19}{8}$, azaz $\underline{K\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{19}{8}\right)}$. A kör sugara: $\underline{r=}\left|\overline{KA}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{7}{6}-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{19}{8}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)^2}=\underline{\sqrt{\dfrac{5\,905}{576}}}$. Így a kör egyenlete: $\underline{\underline{k:\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{19}{8}\right)^2=\dfrac{5\,905}{576}}}$.

1.52. Megjegyzés. A $K(u;v)$ középpontú r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Ezt az egyenletet tehát azon $P(x;y)$ pontok koordinátái teljesítik, melyek a körvonalon vannak. A távolságformulából adódik, hogy amennyiben $P(x;y)$ a nyílt körlapon van, úgy P koordinátáira az $(x-u)^2+(y-v)^2<r^2$, ha pedig $P(x;y)$ a körön kívül található, úgy P koordinátáira az $(x-u)^2+(y-v)^2>r^2$ egyenlőtlenség teljesül. Ez algebrai lehetőséget ad annak ellenőrzésére, hogy adott körhöz képest hol helyezkednek el adott pontok: a körvonalon, a körön belül, vagy a körön kívül találhatók. A körvonalon belüli pontok a kör *belső pontjai*, a körvonalon kívüli pontok a kör *külső pontjai*.

1.53. Feladat ([2] 3829)**.** Írjuk fel az $r=5$ egység sugarú $K(-1;2)$ középpontú kör egyenletét! Hogyan helyezkednek el az $A(-3;0)$, $B(3;-3)$, $C(4;2)$, $D(2;7)$, $E(-4;6)$, $F(3;-1)$ koordinátájú pontok az adott körhöz viszonyítva?

Megoldás. Legyen a szóban forgó kör k. Ekkor $k : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Helyettesítsük be a pontok koordinátáit az egyenlet bal oldalába!

$A(-3;0)$: $(-3+1)^2 + (0-2)^2 = 8 < 25$, így A a k körön belül van.
$B(3;-3)$: $(3+1)^2 + (-3-2)^2 = 41 > 25$, így B a k körön kívül van.
$C(4;2)$: $(4+1)^2 + (2-2)^2 = 25$, így C a körvonalon van.
$D(2;7)$: $(2+1)^2 + (7-2)^2 = 34 > 25$, így D a körön kívül van.
$E(-4;6)$: $(-4+1)^2 + (6-2)^2 = 25$, így E a körvonalon van.
$F(3;-1)$: $(3+1)^2 + (-1-2)^2 = 25$, így F is a körvonalon van.

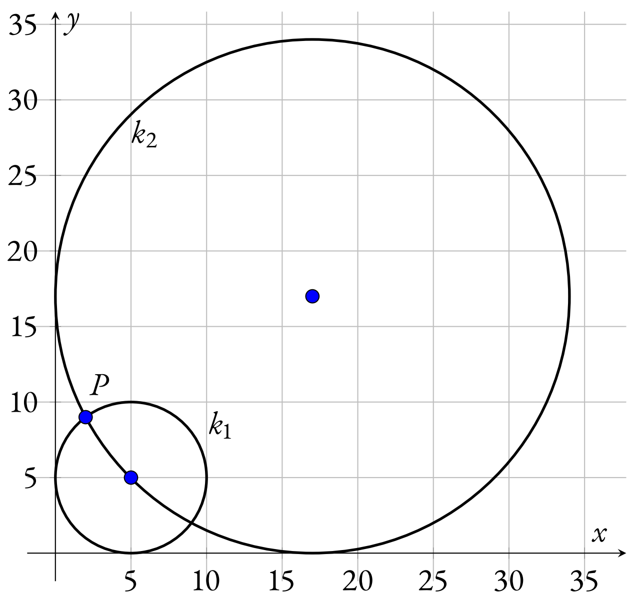
1.54. Feladat ([2] 3839. a)). Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely a $(2;9)$ ponton halad át, és mindkét koordinátatengelyt érinti.

Megoldás. Legyen a keresett kör k. Mivel $(2;9) \in k$, és k mindkét koordinátatengelyt érinti, ezért a kör K középpontja az első síknegyedben található, továbbá $K(u;u)$ alakú, ahol $u > 0$, és $r = u$. Eszerint k egyenlete: $k : (x-u)^2 + (y-u)^2 = u^2$ alakú.

Mivel $P(2;9) \in k$, a következő egyenletet nyerjük u-ra:

$$\begin{aligned} (2-u)^2 + (9-u)^2 &= u^2 \\ 4 - 4u + u^2 + 81 - 18u + u^2 &= u^2 \\ u^2 - 22u + 85 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldva az egyenletet, $u_1 = 5$, $u_2 = 17$ adódik. Két megoldást kaptunk, $k_1 : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $k_2 : (x-17)^2 + (y-17)^2 = 289$, melyeket az 1.11. ábrán ábrázoltunk.



1.11. ábra

1.55. Feladat ([2] 3844. a)). Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $P_1(3;0)$ és a $P_2(-1;2)$ pontokon, és a középpontja az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

Megoldás. Legyen $e: x-y+2=0$, a keresett k kör középpontja $K(u;v)$, sugara r. Mivel $K \in e$, ezért $u-v+2=0$, amiből $u=v-2$. Ezt beírva k egyenletébe adódik, hogy

$$\underline{k:(x-v+2)^2+(y-v)^2=r^2.}$$

Mivel $P_1(3;0) \in k$, ezért

$$(3-v+2)^2+(0-v)^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{(5-v)^2+v^2=r^2}.$$

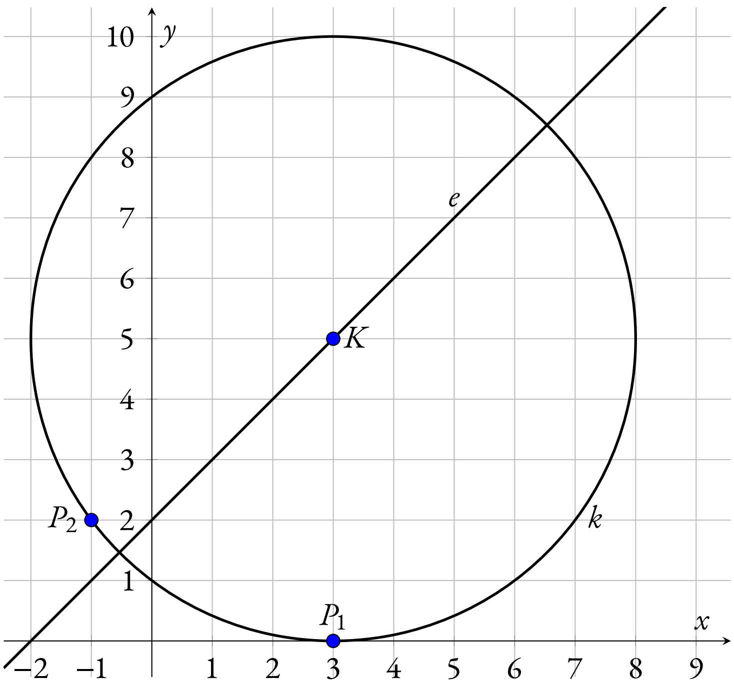
Mivel $P_2(-1;2) \in k$, ezért

$$(-1-v+2)^2+(2-v)^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{(1-v)^2+(2-v)^2=r^2}.$$

A két kapott egyenletben elvégezve a bal oldali műveleteket, a következő egyenletrendszer adódik:

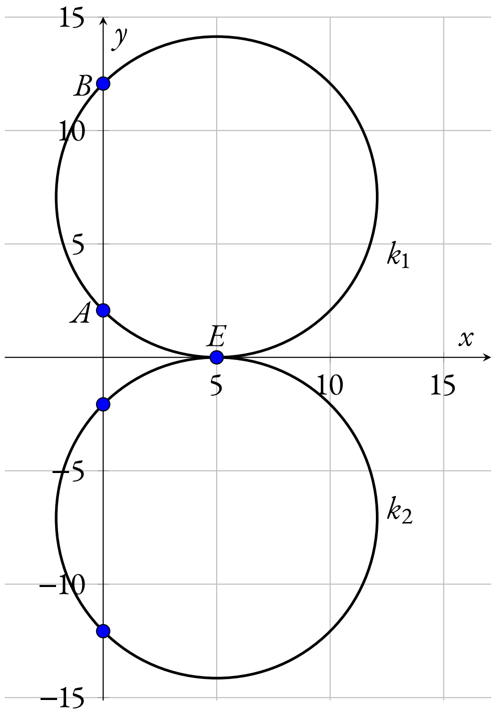
$$\left.\begin{aligned} 25-10v+2v^2 &= r^2 \\ 5-6v+2v^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Kivonva az első egyenletből a másodikat: $20-4v=0$, amiből $\underline{v=5}$. Az (1.7) egyenletrendszer első egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $r^2=25$, amiből $r>0$ miatt $\underline{r=5}$ következik. Helyettesítsük vissza k egyenletébe, és kapjuk, hogy a keresett kör egyenlete: $\underline{\underline{k:(x-3)^2+(y-5)^2=25}}$. A szóban forgó kört az 1.12. ábrán ábrázoltuk.



1.12. ábra

1.56. Feladat ([2] 3873)**.** Mi az egyenlete annak a körnek, amely az x-tengelyt az $(5;0)$ pontban érinti, s az y-tengelyből 10 egység hosszú húrt metsz ki?



1.13. ábra

Megoldás. Legyen a keresett kör k. Mivel $E(5; 0)$ pontban érinti a kör az x-tengelyt, ezért a kör középpontja: $K(5; v)$ alakú, és sugara $r = v$ vagy $r = -v$. Emiatt a keresett kör egyenlete

$$k : (x-5)^2 + (y-v)^2 = v^2$$

alakú. Messük el ezt a kört az y-tengellyel, így kapjuk az A, illetve B pontokat (lásd az 1.13. ábrát).

Mivel az y-tengely egyenlete: $x = 0$, ezért a metszéspontok koordinátái megoldják a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} (x-5)^2 + (y-v)^2 &= v^2 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet az elsőbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} 25 + (y-v)^2 &= v^2 \\ (y-v)^2 &= v^2 - 25 \end{aligned}$$

A keresett kör csak akkor metszi el az y-tengelyt, ha $v^2 - 25 \geq 0$. Ebből $y - v = \pm\sqrt{v^2 - 25}$, vagyis $y = v \pm \sqrt{v^2 - 25}$. A kör az y-tengelyt tehát az $\underline{A\left(0; v - \sqrt{v^2-25}\right)}$, illetve a $\underline{B\left(0; v + \sqrt{v^2-25}\right)}$ pontokban metszi el.

A feltétel szerint $\left|\overline{AB}\right| = 10$, vagyis

$$\begin{aligned}\sqrt{(0-0)^2+\left(v-\sqrt{v^2-25}-v-\sqrt{v^2-25}\right)^2} &= 10\\ \sqrt{4\left(v^2-25\right)} &= 10\\ v^2-25 &= 25\\ v &= \pm 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Két megoldást kaptunk: $\underline{\underline{k_1 : (x-5)^2+\left(y-5\sqrt{2}\right)^2 = 50}}$, illetve $\underline{\underline{k_2 : (x-5)^2+\left(y+5\sqrt{2}\right)^2 = 50}}$.

1.2.2. A kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenlete

Motiváció. A $K(u; v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$. A bal oldalon a zárójelek felbontásával az

$$x^2-2ux+u^2+y^2-2vy+v^2 = r^2$$

egyenletet nyerjük. Tetszőleges $A \neq 0$ számmal szorozva ekvivalens egyenletet kapunk, melynek alakja:

$$Ax^2+Ay^2-2Aux-2Avy+Au^2+Av^2-Ar^2 = 0. \tag{1.8}$$

Fordítsuk meg a kérdést! A kétismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja:

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F = 0 \tag{1.9}$$

alakú, ahol A, B, C nem mindegyike nulla ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$). Mikor lehet ez kör egyenlete?

Az (1.9) egyenlet akkor lesz kör egyenlete, ha $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$ alakúra hozható. Az (1.8) egyenlettel összevetve ebből következik, hogy az (1.9) egyenlet csak akkor lehet kör egyenlete, ha $A = B \neq 0$, továbbá $C = 0$.

Az (1.8) egyenlettel összehasonlítva az is adódik, hogy szükségképpen teljesülnie kell a

$$-2Au = D; \quad -2Av = E; \quad Au^2+Av^2-Ar^2 = F$$

egyenleteknek. Némi rendezés után adódik, hogy

$$u = -\frac{D}{2A}; \quad v = -\frac{E}{2A}; \quad r^2 = \frac{Au^2+Av^2-F}{A}.$$

Alakítsuk az r^2-re kapott kifejezést:

$$r^2 = \frac{A\cdot\left(-\frac{D}{2A}\right)^2+A\cdot\left(-\frac{E}{2A}\right)^2-F}{A} = \frac{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A}}{A} = \frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

Amennyiben $D^2+E^2-4AF < 0$, úgy r-re nem kapunk értelmezhető értéket. Ekkor az (1.9) egyenlet nem kör egyenlete. Ellenkező esetben viszont azt kapjuk, hogy az (1.9) egyenlet kör egyenlete. Az alábbi tételt igazoltuk.

1.57. Tétel. Az $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ egyenlet pontosan akkor kör egyenlete, ha

- $C = 0$;
- $A = B$;
- $D^2 + E^2 - 4AF \geq 0$.

A szóban forgó kör középpontja $K\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2A}\right)$, sugara $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$.

1.58. Megjegyzés. A gyakorlatban a feladatok megoldása során igen ritkán alkalmazzuk ezt a tételt. A két triviális feltétel teljesülése ($C = 0$, $A = B$) azonnal leolvasható az egyenletből, ezután *teljes négyzetté alakítással* igyekszünk az (1.9) egyenletet a kör egyenletének kanonikus alakjára hozni.

1.59. Feladat ([2] 3863)**.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő egyenletek közül melyik lehet kör egyenlete? Határozzuk meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát.

a) $x^2 + y^2 = 25$;

b) $x^2 + y^2 - 10 = 0$;

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 10$;

d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

e) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$;

f) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$;

g) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$;

h) $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$;

i) $x^2 + y^2 + 10x = 0$;

j) $x^2 + y^2 + 2,4x - 3y - 2,56 = 0$;

k) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 75 = 0$;

l) $16x^2 + 16y^2 - 24x - 16y - 243 = 0$;

m) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$;

n) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 5y + 3 = 0$;

o) $x^2 + y^2 + ax = 0$;

p) $x^2 + y^2 - ax = 0$;

q) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$;

r) $x^2 + y^2 + 4x - 9y + 40 = 0$;

s) $x^2 + y^2 + 2xy - 3 = 0$;

t) $x^2 + y^2 + ax + by = 0$;

u) $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 0$;

v) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$;

w) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Megoldás. a) A kanonikus alakból kapjuk, hogy kör egyenletéről van szó, melynek középpontja $\underline{\underline{K(0;0)}}$, sugara $\underline{\underline{r = 5}}$.

b) Átrendezve: $x^2 + y^2 = 10$, vagyis körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(0;0)}}$, sugara $\underline{\underline{r = \sqrt{10}}}$.

c) Átrendezve: $x^2 + y^2 = 20$, vagyis kör egyenlete, középpontja $\underline{\underline{K(0;0)}}$, sugara $\underline{\underline{r = 2\sqrt{5}}}$.

d) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(1;2)}}$, sugara $\underline{\underline{r=2}}$.

e) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 12 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 1 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(3;-2)}}$, sugara $\underline{\underline{r=1}}$.

f) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 36 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 - 49 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 49$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(-2;3)}}$, sugara $\underline{\underline{r=7}}$.

g) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 6 = 0$$
$$(x+3)^2 + (y+1)^2 - 16 = 0$$
$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(-3;-1)}}$, sugara $\underline{\underline{r=4}}$.

h) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 7 = 0$$
$$x^2 + (y-4)^2 - 9 = 0$$
$$x^2 + (y-4)^2 = 9$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(0;4)}}$, sugara $\underline{\underline{r=3}}$.

i) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + 10x + 25 - 25 + y^2 = 0$$
$$(x+5)^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$(x+5)^2 + y^2 = 25$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(-5;0)}}$, sugara $\underline{\underline{r=5}}$.

j) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + 2,4x + 1,44 - 1,44 + y^2 - 3y + 2,25 - 2,25 - 2,56 = 0$$
$$(x + 1,2)^2 + (y - 1,5)^2 - 6,25 = 0$$
$$(x + 1,2)^2 + (y - 1,5)^2 = 6,25$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K(-1,2;1,5)}}$, sugara $\underline{\underline{r = 2,5}}$.

k) Osszuk az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + y^2 - 5x - \frac{75}{4} = 0$$
$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + y^2 - \frac{75}{4} = 0$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - 100 = 0$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 100$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(\frac{5}{2};0\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r = 10}}$.

l) Osszuk az egyenlet mindkét oldalát 16-tal, majd alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - y - \frac{243}{16} = 0$$
$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{243}{16} = 0$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{283}{16} = 0$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{283}{16}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r = \frac{\sqrt{283}}{4}}}$.

m) Osszuk az egyenlet mindkét oldalát 3-mal, majd alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 2y - 5 = 0$$
$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 5 = 0$$
$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{277}{36} = 0$$
$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{277}{36}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r=\frac{\sqrt{277}}{6}}}$.

n) Osszuk az egyenlet mindkét oldalát 2-vel, majd alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}&=0\\
x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+y^2-\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}&=0\\
\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5}{8}&=0\\
\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2&=\frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r=\frac{\sqrt{10}}{4}}}$.

o) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned}
x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2&=0\\
\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2-\frac{a^2}{4}&=0\\
\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2&=\frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(-\frac{a}{2};0\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r=\frac{|a|}{2}}}$.

p) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned}
x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2&=0\\
\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2-\frac{a^2}{4}&=0\\
\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2&=\frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(\frac{a}{2};0\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r=\frac{|a|}{2}}}$.

q) Mivel x^2 és y^2 együtthatója nem egyezik meg, ezért nem kör egyenlete.

r) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned} x^2+4x+4-4+y^2-9y+\frac{81}{4}-\frac{81}{4}+40&=0\\ (x+2)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{63}{4}&=0\\ (x+2)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2&=-\frac{63}{4} \end{aligned}$$

Mivel ellentmondásra jutottunk, ez nem lehet kör egyenlete (sőt, egyetlen olyan pont sincs a koordinátasíkon, mely ezt az egyenletet teljesítené).

s) Mivel az egyenletben szerepel xy tag, ezért nem lehet kör egyenlete. Ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2xy-3&=0\\ (x+y)^2&=3 \end{aligned}$$

Ezzel ekvivalens, hogy $x+y=\sqrt{3}$ vagy $x+y=-\sqrt{3}$. Az egyenlet által megadott ponthalmaz tehát egy merőleges egyenespár.

t) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned} x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}&=0\\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{4}&=0\\ \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2&=\frac{a^2+b^2}{4} \end{aligned}$$

Eszerint körről van szó, középpontja $\underline{\underline{K\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)}}$, sugara $\underline{\underline{r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$.

u) Mivel x^2 és y^2 együtthatója nem egyezik meg, ezért nem kör egyenlete.

v) Alakítsunk teljes négyzetté x, illetve y változó szerint:

$$\begin{aligned} x^2-6x+9-9+y^2+8y+16-16+25&=0\\ (x-3)^2+(y+4)^2&=0 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletet egyetlen pont, a $(3;-4)$ elégíti ki. Nézőpont kérdése, hogy ez kör egyenlete-e, amennyiben egy körtől elvárjuk, hogy pozitív legyen a sugara (valljuk be, ez a hagyományos értelmezés), akkor ez nem egy kör egyenlete. Tekinthető ugyanakkor a $(3;-4)$ középpontú, 0 sugarú kör egyenletének is.

w) Mivel x^2 és y^2 együtthatója nem egyezik meg, ezért nem kör egyenlete.

1.2.3. Egyenes és kör kölcsönös helyzete

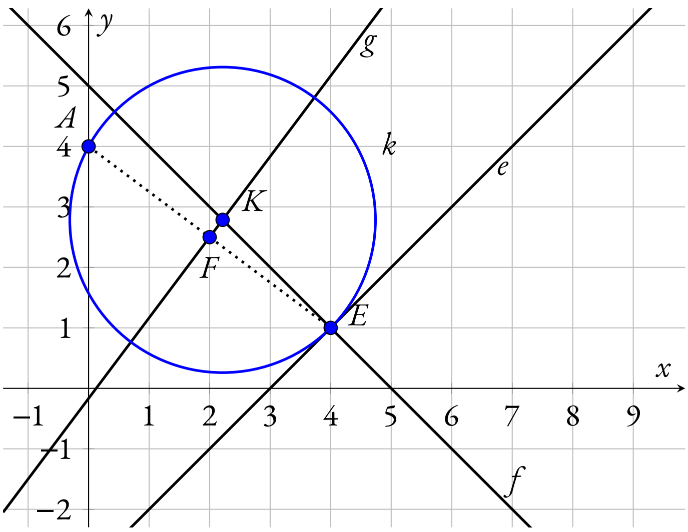
Amennyiben egy $P(x;y)$ pont az e egyenesnek, illetve a k körnek is pontja, úgy P kielégíti e és k egyenletét is. Ebből adódik, hogy $P(x;y)$ pont pontosan akkor metszéspontja az e egyenesnek és a k körnek, ha az $(x;y)$ számpár megoldja az e és k egyenletéből álló egyenletrendszert.

Ennek megoldása során nehezebb dolgunk van, mint egyenesek metszéspontjának megkeresésekor, ugyanakkor a szóban forgó egyenletrendszer másodfokú, melyben az egyik egyenlet – az egyenes egyenlete – elsőfokú. A standard stratégiánk emiatt az egyenletrendszer megoldására a következő: az egyenes egyenletéből kifejezzük valamely ismeretlent, majd ezt a kör egyenletébe helyettesítjük. Másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai adják a metszéspontok egyik koordinátáját. A legegyszerűbb ezek után, ha a szóban forgó koordinátákat az egyenes egyenletébe helyettesítjük, ezzel megkapva a metszéspontok másik koordinátáit is.

1.60. Következmény. Mivel egyenes és kör metszéspontjainak meghatározásakor végső soron másodfokú egyenletet kell megoldanunk, ennek lehet 0, 1 vagy 2 megoldása diszkriminánsának előjelétől függően. Ennek megfelelően kör és egyenes is legfeljebb csak 2 pontban metszheti egymást, és lehet 0, vagy 1 metszéspontjuk is. Utóbbi esetben a kör és az egyenes *érintik egymást*, a megfelelő másodfokú egyenlet diszrkiminánsa pedig 0.

1.61. Feladat. [[2] 3846. a)] Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(0;4)$ ponton, és az $y = x - 3$ egyenletű egyenest a 4 abszcisszájú pontjában érinti.

Megoldás. Tekintsük az 1.14. ábra jelöléseit: $A(0;4)$, $e : y = x - 3$, ennek a 4 abszcisszájú pontja $E(4;1)$. A keresett kör legyen k.



1.14. ábra

Mivel k-t érinti e az E pontban, ezért a kör K középpontja rajta van az e-re E-ben állított merőleges f egyenesen. Másfelől, mivel A és E ugyanakkora távolságra van k-tól, ezért K rajta van az $\overline{AE}$ szakasz g felezőmerőlegesén is. A kör középpontját ezáltal az f és g egyenesek metszéspontjaként számolhatjuk.

Írjuk fel először f egyenes egyenletét! Mivel $e : x - y = 3$, ezért $\mathbf{n}_e = (1;-1)$. $f \perp e$, így $\mathbf{n}_f = (1;1)$. Mivel $E \in f$, ezért $f : x + y = 4 + 1$, azaz $\underline{f : x + y = 5}$.

Írjuk fel g egyenletét! g egy normálvektora: $\mathbf{n}_g = \overrightarrow{AE} = \mathbf{e} - \mathbf{a} = (4; -3)$. Az $\overline{AE}$ szakasz F felezőpontja: $F\left(\frac{0+4}{2}; \frac{4+1}{2}\right) = \left(2; \frac{5}{2}\right)$. Mivel $F \in g$, ezért g egyenlete: $g: 4x - 3y = 4 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{5}{2}$, azaz $g: 4x - 3y = \frac{1}{2}$. 2-vel szorozva az egyenlet mindkét oldalát: $\underline{g: 8x - 6y = 1}$.

$K = f \cap g$, megoldandó tehát a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 8x - 6y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet 6-tal szorozva:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 6y &= 30 \\ 8x - 6y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$\begin{aligned} 14x &= 31 \\ x &= \frac{31}{14} \end{aligned}$$

Például f egyenletébe visszahelyettesítve: $y = 5 - \frac{31}{14} = \frac{39}{14}$. A kör középpontja tehát $\underline{K\left(\frac{31}{14}; \frac{39}{14}\right)}$.

A kör sugárnégyzete:

$$\underline{r^2} = \left|\overline{KA}\right|^2 = \left(\frac{31}{14} - 0\right)^2 + \left(\frac{39}{14} - 4\right)^2 = \overline{\frac{625}{98}}.$$

Ebből következik, hogy a keresett kör egyenlete:

$$\underline{\underline{k: \left(x - \frac{31}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{39}{14}\right)^2 = \frac{625}{98}.}}$$

1.62. Megjegyzés. Az 1.61. feladat megoldása során elemi geometriai meggondolások után tértünk rá a koordinátageometriai számolásra. A koordinátageometriai feladatok megoldásának ez az egyik lehetséges iránya: meggondoljuk, hogy hagyományos módon *hogyan szerkesztenénk meg* a keresett alakzatot, majd ennek mentén végigszámoljuk a megfelelő egyenesek/körök egyenletét, a metszéspontok koordinátáit, stb.

1.63. Feladat. [[2] 3850] Egy kör átmegy a $P(0;1)$ ponton és érinti az $y = x + 3$ és az $y = x - 1$ egyenletű egyeneseket. Írjuk fel a kör egyenletét.

Megoldás. Legyen $e: y = x + 3$, $f: y = x - 1$. A feladat megoldása során az 1.48, illetve az 1.42. állításokat használjuk fel. A szóban forgó egyenesek párhuzamosak, hiszen mindkettőnek 1 a meredeksége. Emiatt az e-t és f-et is érintő kör átmérője a két egyenes távolsága. Átrendezve az egyenleteket: $e: x - y = -3$; $f: x - y = 1$. A párhuzamos egyenesek távolságára vonatkozó formula szerint a keresett kör átmérője

$$d = \mathrm{d}(e; f) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2},$$

amiből a keresett kör sugara: $\underline{r = \sqrt{2}}$.

Másrészt, ha a kör középpontja $K(u; v)$, akkor K ugyanolyan messze van a P ponttól, mint az e, illetve az f egyenestől, és mindkét távolság sugárnyi. K és P távolsága:

$$\left|\overline{KP}\right| = \sqrt{(u-0)^2 + (v-1)^2} = \sqrt{u^2 + (v-1)^2} = \sqrt{2},$$

amiből

$$u^2 + (v-1)^2 = 2. \tag{1.10}$$

f egyenlete egy picit egyszerűbb, mint e egyenlete, így írjuk fel f és K távolságát. f normálegyenlete:

$$\frac{x-y-1}{\sqrt{2}} = 0,$$

így

$$\mathrm{d}(K; f) = \left|\frac{u-v-1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2},$$

amiből

$$|u-v-1| = 2. \tag{1.11}$$

Az (1.10) és az (1.11) egyenletek alapján a kör középpontjának koordinátáira a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\left.\begin{aligned} u^2 + (v-1)^2 &= 2 \\ |u-v-1| &= 2 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenlet alapján esetszétválasztást végzünk.

1. eset: ha $u - v - 1 = 2$, azaz $u = v + 3$: írjuk ezt be az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} (v+3)^2 + (v-1)^2 &= 2 \\ v^2 + 6v + 9 + v^2 - 2v + 1 &= 2 \\ 2v^2 + 4v + 8 &= 0 \\ v^2 + 2v + 4 &= 0 \end{aligned}$$

   Ennek a másodfokú egyenletnek nincs megoldása, innen tehát nem kapunk megoldást.

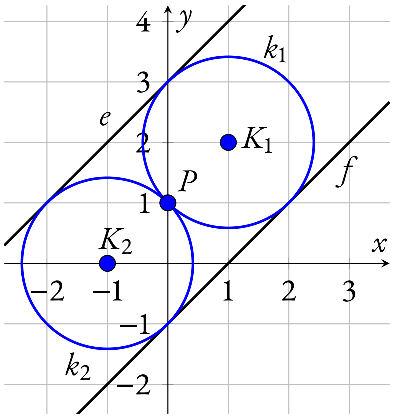
2. eset: ha $u - v - 1 = -2$, azaz $u = v - 1$: írjuk ezt be az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} (v-1)^2 + (v-1)^2 &= 2 \\ 2(v-1)^2 &= 2 \\ (v-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

   Ebből $v - 1 = 1$, azaz $v_1 = 2$ vagy $v - 1 = -1$, azaz $v_2 = 0$. Előbbi esetben $u_1 = 1$, utóbbi esetben $u_2 = -1$.

   Két lehetséges kört kapunk tehát, melyek középpontjai $\underline{K_1(1; 2)}$; $\underline{K_2(-1; 0)}$, sugaruk $\underline{r = \sqrt{2}}$. Ezek alapján a keresett körök egyenletei:

$$\underline{\underline{k_1 : (x-1)^2 + \left(y-2\right)^2 = 2}}; \quad \underline{\underline{k_1 : (x+1)^2 + y^2 = 2.}}$$



1.15. ábra

A kapott megoldásokat az 1.15. ábrán ábrázoltuk.

1.64. Megjegyzés. Az 1.63. feladat megoldása során is eljárhattunk volna az elemi geometriai módszerek koordinátageometriai megfelelőinek alkalmazásával. A keresett körök középpontjai ugyanis rajta vannak e és f középpárhuzamosán, továbbá távolságuk P-től éppen e és f távolságának fele.

1.65. Feladat ([2] 3859)**.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x + y = 0$ egyenletű egyenest az origóban érinti, és érinti az $x = 1$ egyenletű egyenest is.

Megoldás. Legyenek az adott egyenesek: $e : x + y = 0, f : x = 1$, továbbá $O(0; 0)$. Mivel e érinti k-t az O pontban, ezért a kör $K(u; v)$ középpontja rajta van az O-ban e-re állított merőleges g egyenesen. $\mathbf{n}_e = (1; 1)$, ezért $\mathbf{n}_g = (1; -1)$, s így $O \in g$ szerint g egyenlete: $g : x - y = 0$. Mivel $K \in g$, ezért ebből $u = v$, vagyis $K(u; u)$ következik.

Másfelől, mivel a keresett kör érinti az e és az f egyenest is, ezért középpontja ugyanolyan távol van e-től és f-től is. Az 1.42. állításban igazolt képletet fogjuk használni. e normálegyenlete: $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$, f normálegyenlete: $f : x - 1 = 0$, amiből

$$\mathrm{d}(K; e) = \left|\frac{u+u}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} \cdot |u|; \quad \mathrm{d}(K; f) = |u - 1|.$$

A feltétel szerint megoldandó a

$$\sqrt{2}\,|u| = |u - 1|$$

egyenlet. Mivel $u \neq 0$, ezzel ekvivalens:

$$\sqrt{2} = \left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

Két eset lehetséges.

1. eset: $\frac{u-1}{u} = \sqrt{2}$, amiből

$$u - 1 = \sqrt{2}u$$
$$\left(1 - \sqrt{2}\right) u = 1$$
$$u = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$$

Gyöktelenítés után ebből $u = -1 - \sqrt{2}$ következik. A kör sugara: $r = \mathrm{d}(K; f) = \sqrt{2} + 2$ korábbi formulánkba történő behelyettesítés alapján. Ekkor tehát a megfelelő kör egyenlete:

$$\underline{\underline{k_1 : \left(x + 1 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 1 + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} + 2\right)^2.}}$$

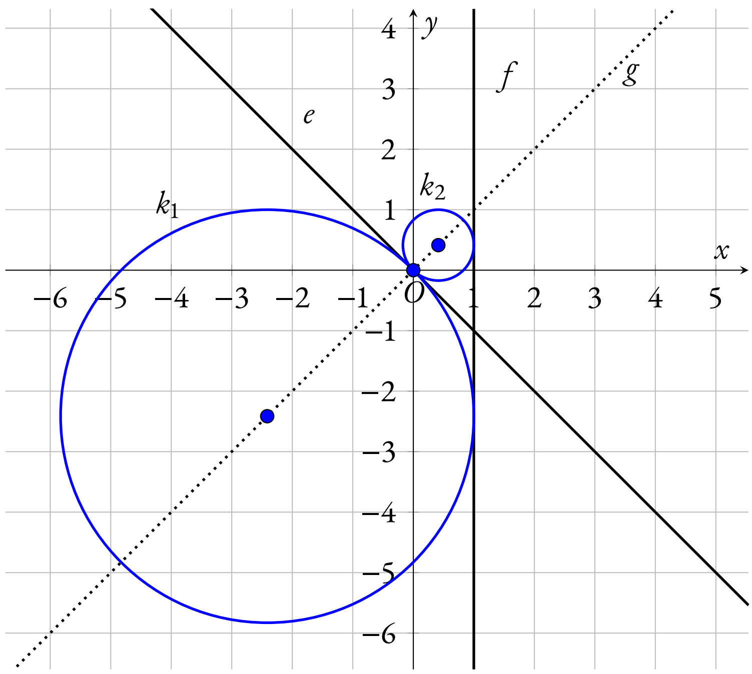
2. eset: $\dfrac{u-1}{u} = -\sqrt{2}$, amiből

$$\begin{aligned} u - 1 &= -\sqrt{2}u \\ \left(1 + \sqrt{2}\right) u &= 1 \\ u &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Gyöktelenítés után ebből $u = -1 + \sqrt{2}$ következik. A kör sugara: $r = \mathrm{d}(K; f) = \sqrt{2} - 2$ korábbi formulánkba történő behelyettesítés alapján. Ekkor tehát a megfelelő kör egyenlete:

$$\underline{\underline{k_2 : \left(x + 1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 1 - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 2\right)^2.}}$$

A kapott megoldásokat az 1.16. ábrán ábrázoltuk.



1.16. ábra

1.66. Feladat. [[2] 3883] Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely a $2x + y = 19$ egyenletű egyenest a $P(7; 5)$ pontjában érinti és a koordinátatengelyekből egyenlő hosszú húrokat metsz ki.

Megoldás. Legyen $e: 2x + y = 19$. A keresett kör középpontjának rajta kell lennie az e-re P pontban állított merőleges f egyenesen. Írjuk fel ennek egyenletét! Mivel $\mathbf{n}_e = (2; 1)$, ezért $\mathbf{n}_f = (1; -2)$. Mivel $P \in f$, ezért $f: x - 2y = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 5$, azaz $\underline{f: x - 2y = -3}$.

Ha a kör középpontja $K(u, v)$, akkor $K \in f$ miatt ebből $u - 2v = -3$, vagyis $u = 2v - 3$ következik. Ez azt jelenti, hogy $K(2v - 3; v)$, azaz a kör középpontja *egy paraméterrel* felírható.

A kör sugárnégyzete:

$$r^2 = \left|\overline{KP}\right|^2 = (2v - 3 - 7)^2 + (v - 5)^2 = (2v - 10)^2 + (v - 5)^2 =$$
$$= 4v^2 - 40v + 100 + v^2 - 10v + 25 = 5v^2 - 50v + 125.$$

A keresett kör egyenlete tehát

$$\underline{k: (x - 2v + 3)^2 + (y - v)^2 = 5v^2 - 50v + 125} \tag{1.12}$$

alakú. Mivel az egyenlet egyetlen paramétertől függ, további egy információ v-re vonatkozó egyenletet szolgáltat nekünk.

Nézzük meg k-nak az y-tengellyel való metszéspontjait! Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ (x - 2v + 3)^2 + (y - v)^2 &= 5v^2 - 50v + 125 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből x-re kapott értéket a másodikba helyettesítve:

$$\begin{aligned} (-2v + 3)^2 + (y - v)^2 &= 5v^2 - 50v + 125 \\ 4v^2 - 12v + 9 + (y - v)^2 &= 5v^2 - 50v + 125 \\ (y - v)^2 &= v^2 - 38v + 116 \end{aligned}$$

Ebből

$$y_1 = v - \sqrt{v^2 - 38v + 116} \quad \text{vagy} \quad y_2 = v + \sqrt{v^2 - 38v + 116}$$

adódik. Kikötést most a következők miatt nem teszünk: amennyiben létrejön a kör és az y-tengely metszéspontja, úgy ezen gyökös kifejezéseknek van értelmük. A gyök alatti mennyiség pontosan akkor negatív, ha a körnek és az y-tengelynek nincs közös pontja, ekkor viszont eleve nem tudjuk értelmezni a feltételt. A számolás geometriai háttere tehát azt mutatja, hogy amennyiben van megoldása az egyenletnek, úgy az szükségképpen a kikötésnek is megfelel, hiszen a geometriai feladatnak is van megoldása.

Azt kaptuk tehát, hogy a kör és az y-tengely metszéspontjai:

$$A\left(0; v - \sqrt{v^2 - 38v + 116}\right); \quad B\left(v + \sqrt{v^2 - 38v + 116}\right).$$

Az $\overline{AB}$ húr hossza:

$$\underline{\left|\overline{AB}\right|} = \sqrt{(0 - 0)^2 + \left(v - \sqrt{v^2 - 38v + 116} - v - \sqrt{v^2 - 38v + 116}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{4\left(v^2 - 38v + 116\right)} = \underline{2\sqrt{v^2 - 38v + 116}.}$$

Határozzuk most meg k-nak az x-tengellyel való metszéspontjait! Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ (x-2v+3)^2+(y-v)^2 &= 5v^2-50v+125 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből y-ra kapott értéket a másodikba helyettesítve:

$$\begin{aligned} (x-2v+3)^2+v^2 &= 5v^2-50v+125 \\ (x-2v+3)^2 &= 4v^2-50v+125 \end{aligned}$$

Ebből

$$x_1 = 2v-3-\sqrt{4v^2-50v+125} \quad \text{vagy} \quad x_2 = 2v-3+\sqrt{4v^2-50v+125}.$$

Kikötéseket a korábbi megjegyzések szerint nem teszünk, mivel feltesszük, hogy a körnek és az x-tengelynek van metszéspontja. A lehetséges metszéspontok ekkor

$$C\left(2v-3-\sqrt{4v^2-50v+125};0\right); \quad D\left(2v-3+\sqrt{4v^2-50v+125};0\right).$$

A $\overline{CD}$ húr hossza:

$$\underline{\left|\overline{CD}\right|} = \sqrt{\left(2v-3-\sqrt{4v^2-50v+125}-2v+3-\sqrt{4v^2-50v+125}\right)^2+(0-0)^2} =$$

$$= \sqrt{4\left(4v^2-50v+125\right)} = \underline{2\sqrt{4v^2-50v+125}}.$$

A feltétel szerint $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$, így a következő egyenletet nyerjük:

$$2\sqrt{v^2-38v+116} = 2\sqrt{4v^2-50v+125}.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, emelhetünk négyzetre:

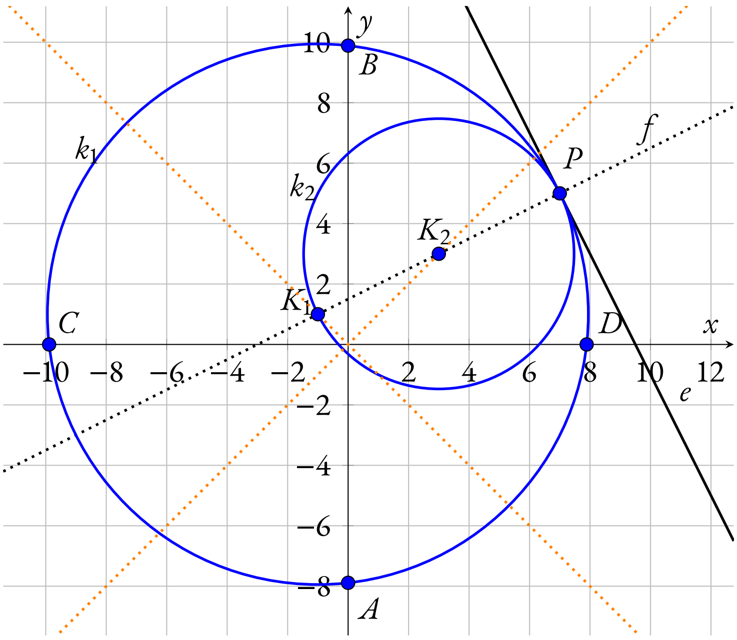
$$\begin{aligned} v^2-38v+116 &= 4v^2-50v+125 \\ 0 &= 3v^2-12v+9 \\ 0 &= v^2-4v+3 \end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenletet megoldva $v_1 = 1$; $v_2 = 3$ adódik. Az (1.12) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk a két megoldást:

$$\underline{\underline{k_1 : (x+1)^2+(y-1)^2 = 80;}} \quad \underline{\underline{k_2 : (x-3)^2+(y-3)^2 = 20.}}$$

A kapott megoldásokat az 1.17. ábrán ábrázoltuk.

1.67. Megjegyzés. Az 1.66. feladat megoldása igen technikás, számunkra a legfontosabb tanulsága, hogy adott egyenest adott pontjában érintő kör egyenletét *egyetlen paraméterrel* fel tudjuk írni. Ezzel az összes ilyen tulajdonságú kört egyetlen paraméterrel jellemezhetjük, így további egy információ (például a kör egy további pontja, érintési tulajdonság, vagy akár a feladatban szereplő előírt húrhossz) egyismeretlenes egyenletre vezet. Ezen egyenlet megoldásával a paraméter, s így a kérdéses kör egyenlete meghatározható.



1.17. ábra

1.68. Megjegyzés. Az 1.66. feladat megoldása egy ügyes észrevétellel lerövidíthető. A feltétel alapján kialakulhat az a megérzésünk, hogy ha egy kör azonos hosszúságú húrokat metsz ki az x-, illetve y-tengelyből, akkor középpontjának koordinátái vagy megegyeznek, vagy egymás ellentettjei – ez azt jelenti, hogy az 1.17. ábrán látható módon a középpont az $y = x$ vagy az $y = -x$ egyenletű egyeneseken található. Igazoljuk ezt az állítást! Legyen a kör egyenlete $k : (x-u)^2 + \left(y-v\right)^2 = r^2$. Ekkor az y-tengellyel való metszéspontokat megkapjuk, ha ebbe az egyenletbe $x = 0$-t helyettesítünk:

$$u^2 + \left(y-v\right)^2 = r^2$$
$$\left(y-v\right)^2 = r^2 - u^2$$

Ebből $y_1 = v - \sqrt{r^2-u^2}$, $y_2 = v + \sqrt{r^2-u^2}$, vagyis az y-tengellyel való metszéspontok $A\left(0; v - \sqrt{r^2-u^2}\right)$, $B\left(0; v + \sqrt{r^2-u^2}\right)$, és az y-tengelyből kimetszett húr hossza:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(0-0)^2 + \left(v - \sqrt{r^2-u^2} - v - \sqrt{r^2-u^2}\right)^2} = \sqrt{4\left(r^2-u^2\right)} = 2\sqrt{r^2-u^2}.$$

Ez a kifejezés természetesen csak akkor értelmes, ha $r^2 - u^2 \geq 0$, azaz $r \geq |u|$, ami pontosan akkor teljesül, ha a kör elmetszi az y-tengelyt.

Analóg számolással adódik, hogy amennyiben a kör az x-tengelyt a C, illetve D pontokban metszi, úgy $C\left(u - \sqrt{r^2-v^2}; 0\right)$, $D\left(u + \sqrt{r^2-v^2}; 0\right)$, és az x-tengelyből kimetszett húr hossza: $\left|\overline{CD}\right| = 2\sqrt{r^2-v^2}$.

Az $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ feltétel a következő egyenletre vezet:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{r^2-u^2} &= 2\sqrt{r^2-v^2} \\ r^2-u^2 &= r^2-v^2 \\ u^2 &= v^2 \\ |u| &= |v| \end{aligned}$$

Tehát valóban $u = v$ vagy $u = -v$ teljesül.

Ez a tény jelentősen lerövidíti a feladat megoldását: tudjuk ugyanis, hogy a keresett kör középpontja az $f : x-2y = -3$ egyenesen is rajta van, vagyis $u-2v = -3$. Ez azt jelenti, hogy a keresett kör középpontjának koordinátái vagy az

$$\left.\begin{aligned} u &= v \\ u-2v &= -3 \end{aligned}\right\}$$

vagy az

$$\left.\begin{aligned} u &= -v \\ u-2v &= -3 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásaként adódnak. Innen kapjuk a megoldást adó körök $K_1(-1;1)$, $K_2(3;3)$ középpontjait, melyek távolságát meghatározva P-től adódnak az $r_1 = \sqrt{80}$ és $r_2 = \sqrt{20}$ sugarak. Innen már a köregyenletek felírhatók.

1.69. Feladat. [[2] 3932] Mekkora szöget zárnak be az $x^2+y^2 = 36$ kör -5 abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintők?

Megoldás. A $k : x^2+y^2 = 36$ egyenletű kör középpontja $K(0;0)$, sugara $r = 6$.

Először meghatározzuk a szóban forgó érintési pontokat. A kör -5 abszcisszájú pontjainak második koordinátái teljesítik a $(-5)^2+y^2 = 36$ egyenletet, melyből $y = \pm\sqrt{11}$. Az érintési pontok tehát $E_1\left(-5;-\sqrt{11}\right)$, $E_2\left(-5;\sqrt{11}\right)$.

Legyen a kört E_1-ben érintő egyenes e_1, a kört E_2-ben érintő egyenes e_2. Az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így e_1 egy normálvektora: $\underline{\mathbf{n}_{e_1}} = \overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1 = \underline{\left(-5;-\sqrt{11}\right)}$. Ugyanígy, e_2 egy normálvektora: $\underline{\mathbf{n}_{e_2}} = \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2 = \underline{\left(-5;\sqrt{11}\right)}$.

Vegyük észre, hogy az egyenesek szöge megegyezik normálvektoraik szögével, vagy annak kiegészítő szögével. Határozzuk meg tehát $\mathbf{n}_{e_1}$ és $\mathbf{n}_{e_2}$ szögét! Ha az általuk bezárt szög φ, akkor

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_{e_1}\cdot\mathbf{n}_{e_2}}{\left|\mathbf{n}_{e_1}\right|\cdot\left|\mathbf{n}_{e_2}\right|} = \frac{(-5)\cdot(-5)-\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}{6\cdot 6} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18},$$

a számolás során felhasználtuk, hogy a normálvektorok hossza épp a kör sugarával egyenlő. Eszerint $\varphi = \arccos\frac{7}{18} \approx \underline{\underline{67,11^\circ}}$, ez tehát az érintők által bezárt szög is.

1.70. Megjegyzés. Az 1.69. feladat megoldása során fontos észrevételt tettünk: egyenesek által bezárt szög meghatározható a normálvektoraik által bezárt szög segítségével. Valóban: az egyenesek szöge az irányvektor definíciójából következő módon vagy megegyezik irányvektoraik szögével, vagy annak kiegészítő szögével (elképzelhető, hogy az irányvektorok tompaszöget zárnak be egymással, két egyenes hajlásszöge ugyanakkor legfeljebb derékszög lehet). 90°-os forgatást végezve, ez az állítás igaz lesz a normálvektorokra is, és ezt használtuk a feladat megoldásában. Fontos egyszerűsítő lépésről van szó: az egyenesek hajlásszögét anélkül sikerült meghatároznunk, hogy fel kellett volna írnunk az egyenletüket.

1.71. Feladat ([2] 3938. a), d)). Keressük meg az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körnek a $4x - 2y = 7$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőit, illetve az $y = 3x - 7$ egyenletű egyenesre merőleges érintőit!

Megoldás. Legyen $k : x^2 + y^2 = 25$, $e : 4x - 2y = 7$, $f : y = 3x - 7$. Legyenek az e-vel párhuzamos érintők e_1, e_2, az f-re merőleges érintők f_1, f_2.

A feladat megoldása során az 1.37, illetve az 1.38. állítást használjuk fel.

Rendezzük át e egyenletét: $e : y = 2x - \frac{7}{2}$, vagyis e meredeksége $m_e = 2$. Mivel $e_1 \parallel e_2 \parallel e$, ezért $m_{e_1} = m_{e_2} = 2$, s így e_1, illetve e_2 egyenlete $y = 2x + b$ alakú, ahol b egyelőre ismeretlen paraméter. Mivel viszont érintőkről van szó, azt tudjuk, hogy egyetlen pontban metszik a k kört. Tekintsük emiatt a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + b \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kapott y értéket a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} x^2 + (2x + b)^2 &= 25 \\ x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 25 &= 0 \\ 5x^2 + 4bx + b^2 - 25 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenes akkor érinti a kört, ha ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0, azaz

$$\begin{aligned} 16b^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(b^2 - 25\right) &= 0 \\ 16b^2 - 20b^2 + 500 &= 0 \\ 4b^2 &= 500 \\ b^2 &= 125 \end{aligned}$$

Ebből $b_1 = -5\sqrt{5}$, $b_2 = 5\sqrt{5}$. Az e-vel párhuzamos két érintő tehát

$$\underline{\underline{e_1 : y = 2x - 5\sqrt{5},}} \quad \underline{\underline{e_2 : y = 2x + 5\sqrt{5}.}}$$

Nézzük most az f-re merőleges érintők esetét. Mivel $f : y = 3x - 7$, ezért $m_f = 3$. Mivel $e_3 \perp f$ és $e_4 \perp f$, ezért $m_{e_3} = m_{e_4} = -\frac{1}{3}$, s így e_3, illetve e_4 egyenlete $y = -\frac{1}{3}x + c$ alakú, ahol c egyelőre ismeretlen paraméter. Mivel e_3, illetve e_4 esetén is érintőről van szó, ismét az a kérdés, hogy mely paraméterértékek esetén fogják egyetlen pontban metszeni a kört. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x + c \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből kapott y értéket a második egyenletbe helyettesítve:

$$
\begin{aligned}
x^2+\left(-\frac{1}{3}x+c\right)^2&=25\\
x^2+\frac{1}{9}x^2-\frac{2c}{3}x+c^2-25&=0\\
\frac{10}{9}x^2-\frac{2c}{3}x+c^2-25&=0\\
10x^2-6cx+9c^2-225&=0
\end{aligned}
$$

Az egyenes akkor érinti a kört, ha a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$
\begin{aligned}
36c^2-4\cdot 10\cdot\left(9c^2-225\right)&=0\\
36c^2-360c^2+9000&=0\\
324c^2&=9000\\
c^2&=\frac{250}{9}
\end{aligned}
$$

Ebből $c_1=-\frac{5\sqrt{10}}{3}$, $c_2=\frac{5\sqrt{10}}{3}$. Az f-re merőleges két érintő tehát:

$$
\underline{\underline{e_3: y=-\frac{1}{3}x-\frac{5\sqrt{10}}{3}}},\quad \underline{\underline{e_4: y=-\frac{1}{3}x+\frac{5\sqrt{10}}{3}}}.
$$

A kapott megoldásokat az 1.18. ábrán ábrázoltuk.

1.2.4. Körhöz külső pontból húzott érintő

1.72. Feladat. [[2] 3935. b)] Írjuk fel a $(7;1)$ pontból az $x^2+y^2=25$ egyenletű körhöz húzható érintők egyenletét. Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit, az érintőszakaszok hosszát és az érintők hajlásszögét.

Megoldás. Legyen $k: x^2+y^2=25$, $P(7;1)$. Keressük az érintők egyenletét iránytényezős alakban. Ekkor az érintő egyenlete vagy $x=7$, vagy $e: y-1=m(x-7)$ alakú.

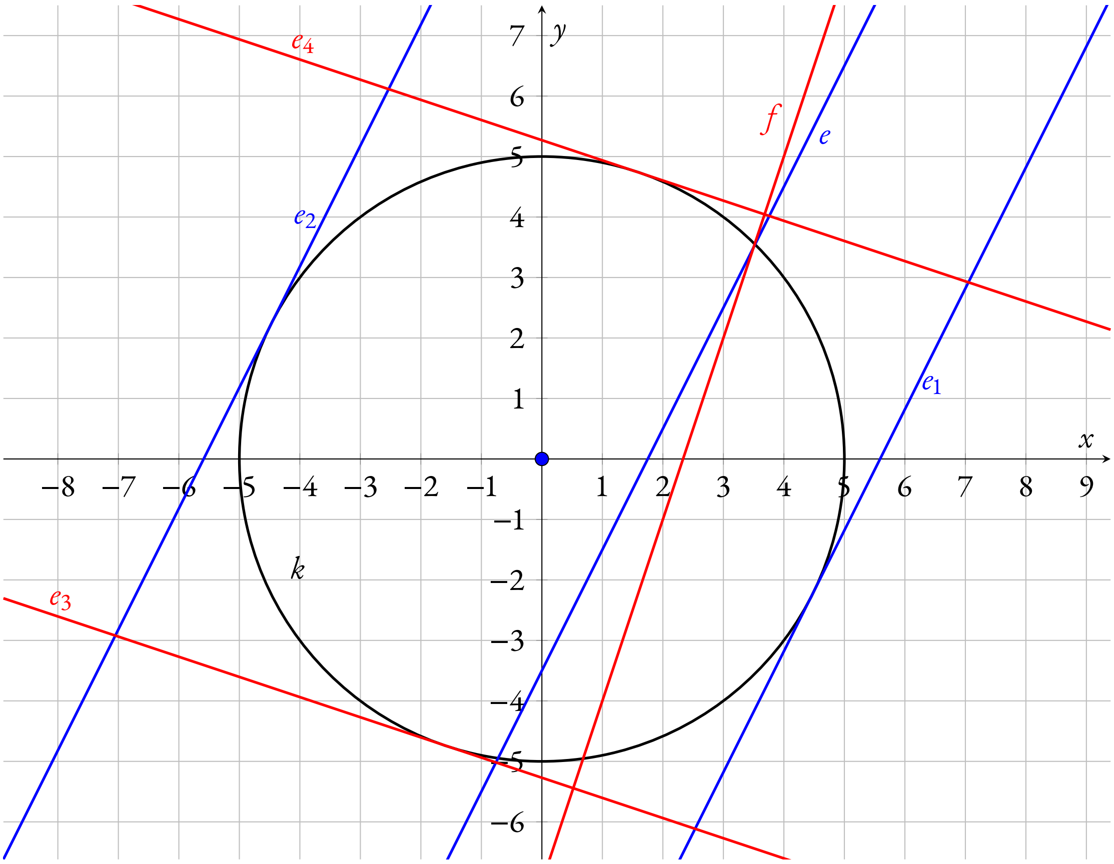
Nézzük meg, érintője-e a körnek az $x=7$ egyenletű egyenes. A közös pontok koordinátái az alábbi egyenletrendszer megoldásaiként adódnak:

$$
\left.\begin{aligned}
x&=7\\
x^2+y^2&=25
\end{aligned}\right\}
$$

Az első egyenletből kapott x-értéket a második egyenletbe helyettesítve az $y^2=-24$ egyenletet kapjuk, melynek nincs valós megoldása. Az $x=7$ egyenletű egyenes tehát nem metszi a kört.

Ezután feltehetjük, hogy a keresett érintő egyenlete a fentiek szerint $\underline{e: y=mx-7m+1}$ alakú. Nézzük ennek metszéspontjait k-val! A következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$
\left.\begin{aligned}
y&=mx-7m+1\\
x^2+y^2&=25
\end{aligned}\right\}
$$



1.18. ábra

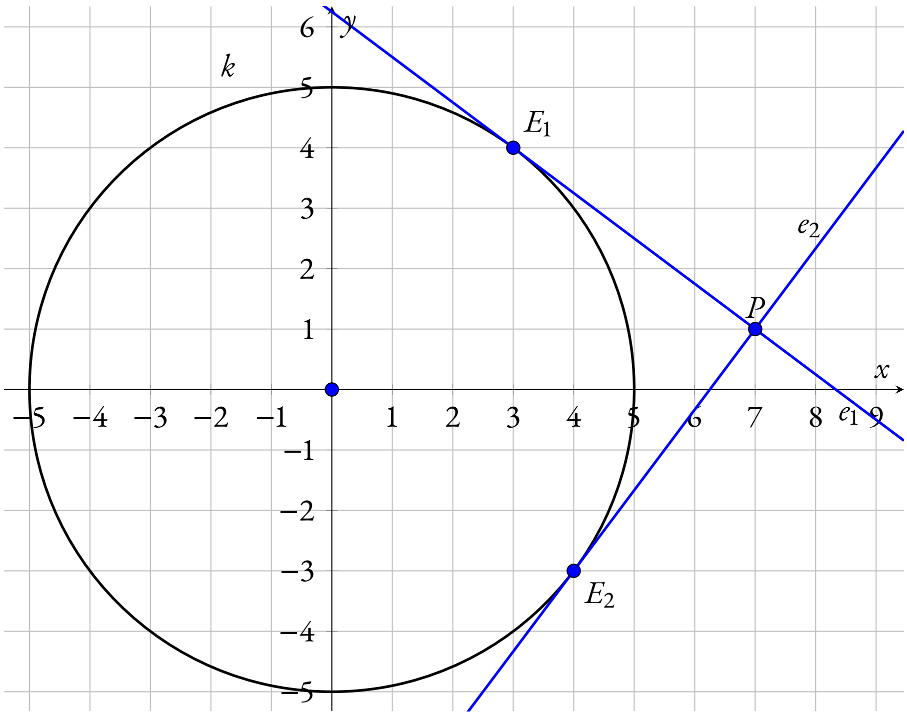
Az első egyenletből y-ra kapott értéket a második egyenletbe helyettesítve:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (mx - 7m + 1)^2 &= 25 \\
x^2 + m^2x^2 + 49m^2 + 1 - 14m^2x + 2mx - 14m &= 25 \\
\left(1 + m^2\right) x^2 + \left(-14m^2 + 2m\right) x + 49m^2 - 14m - 24 &= 0 \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Mivel érintő egyenletét keressük, a kapott másodfokú egyenletnek egy megoldása kell, hogy legyen. Ez pontosan akkor teljesül, ha diszkriminánsa 0:

$$
\begin{aligned}
\left(-14m^2 + 2m\right)^2 - 4\left(1 + m^2\right)\left(49m^2 - 14m - 24\right) &= 0 \\
196m^4 - 56m^3 + 4m^2 - 4\left(49m^2 - 14m - 24 + 49m^4 - 14m^3 - 24m^2\right) &= 0 \\
196m^4 - 56m^3 + 4m^2 - 4\left(49m^4 - 14m^3 + 25m^2 - 14m - 24\right) &= 0 \\
196m^4 - 56m^3 + 4m^2 - 196m^4 + 56m^3 - 100m^2 + 56m + 96 &= 0 \\
-96m^2 + 56m + 96 &= 0 \\
12m^2 - 7m - 12 &= 0
\end{aligned}
$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $m_1 = -\dfrac{3}{4}$, $m_2 = \dfrac{4}{3}$. Visszahelyettestve ezeket e egyenletébe, kapjuk a keresett érintők egyenleteit: $e_1 : y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{25}{4}$, azaz $\underline{\underline{e_1 : 3x + 4y = 25}}$, illetve $e_2 : y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{25}{3}$, azaz $\underline{\underline{e_2 : 4x - 3y = 25}}$. A kapott egyeneseket az 1.19. ábrán ábrázoltuk.



1.19. ábra

A megfelelő meredekségek esetén tehát az egyeneseknek és a körnek egy-egy közös pontjuk van, ezért az (1.13). másodfokú egyenletnek egyetlen megoldása van, mely a megfelelő meredekséggel felírva

$$x = \frac{14m^2 - 2m}{2\left(1 + m^2\right)}.$$

Behelyettestve m_1 és m_2 értékét, $x_1 = 3, x_2 = 4$ adódik, amiből például e egyenletébe helyettesítve, a megfelelő y értékek: $y_1 = 4, y_2 = -3$. Az e_1 egyenes tehát a kört az $\underline{\underline{E_1(3; 4)}}$, az e_2 egyenes a kört az $\underline{\underline{E_2(4; -3)}}$ pontban metszi.

Az érintőszakaszok egyenlő hosszúak, elegendő például $P(7; 1)$ és $E_1(3; 4)$ távolságát meghatározni:

$$\left|\overline{PE_1}\right| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2} = 5,$$

vagyis az érintőszakaszok $\underline{\underline{5}}$ egység hosszúak.

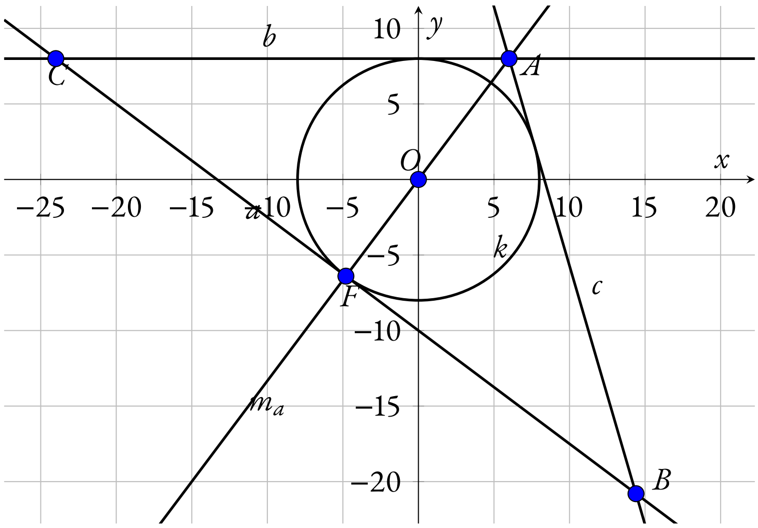
Végül, mivel az érintők meredekségeinek szorzata -1, így merőlegesek egymásra, az általuk bezárt szög $\underline{\underline{90^\circ}}$.

1.73. Megjegyzés. Az 1.72. feladat megoldása során felírtuk adott körhöz külső pontból húzott érintőinek egyenletét. Az alkalmazott stratégia általános: amennyiben algebrai megoldást szeretnénk adni a feladatra, úgy érdemes az adott ponton átmenő egyeneseket iránytényezős alakjuk segítségével paraméterezni (egyben ellenőrizni, hogy az y-tengellyel párhuzamos egyenes lehet-e érintője a körnek). Ha így teszünk, a paraméteres alakot a kör egyenletébe helyettesítve, mindig másodfokú egyenletet kapunk. Érintőt pontosan azon paraméterértékek mellett fogunk kapni, melyeknél a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, hiszen ekkor van az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek egyetlen megoldása.

A feladatot elemi geometriai gondolatok alkalmazásával is megoldhatjuk, lásd az 1.80. példát, illetve az előtte lévő emléket.

1.74. Feladat. [[2] 3940] Egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsa $(6; 8)$, a beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = 64$. Írjuk fel a háromszög alapegyenesének egyenletét, és számítsuk ki a hiányzó két csúcs koordinátáit.

Megoldás. Legyen $A\,(6; 8)$, $k : x^2 + y^2 = 64$. Tekintsük az 1.20. ábra jelöléseit!



1.20. ábra

A háromszögbe írt kör középpontja $O\,(0; 0)$, sugara $r = 8$. Mivel a háromszög egyenlő szárú, a szárak A metszéspontjából húzott m_a magasság az $\overline{BC}$ alap oldalfelező merőlegese. Először tehát felírjuk az m_a egyenes egyenletét, meghatározzuk ennek a k körrel vett F metszéspontját, majd felírjuk az F-en átmenő m_a-ra merőleges egyenes egyenletét: ez lesz a.

Lássunk hozzá: az m_a egyenes egy irányvektora $\mathbf{v}_{m_a} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = (6; 8)$, illetve $\mathbf{v}'_{m_a} = (3; 4)$, amiből egy normálvektora $\mathbf{n}_{m_a} = (4; -3)$. Mivel $O\,(0; 0) \in m_a$, ezért $\underline{m_a : 4x - 3y = 0}$.

$F \in m_a \cap k$, a két metszéspont közül számunkra az a megfelelő, amely a harmadik síknegyedben van. Lássunk hát neki a következő egyenletrendszer megoldásának:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 64 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $x = \dfrac{3y}{4}$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 &= 64 \\ \frac{9y^2}{16} + y^2 &= 64 \\ \left(\frac{5y}{4}\right)^2 &= 64 \end{aligned}$$

Ennek negatív megoldása $y_1 = -\dfrac{32}{5}$, a megfelelő x érték pedig $x = \dfrac{3}{4} \cdot \left(-\dfrac{32}{5}\right) = -\dfrac{24}{5}$, azaz $\underline{F\left(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{32}{5}\right)}$.

a egyenes egy normálvektora: $\mathbf{n}_a = \mathbf{v}'_{m_a} = (3;4)$, továbbá $F \in a$, így a egyenlete: $a : 3x + 4y = 3 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{32}{5}\right)$, azaz $\underline{\underline{a : 3x + 4y = -40}}$.

A másik két oldal egyenesét megkapjuk, ha felírjuk a k kör A ponton átmenő érintőinek egyenletét. Keressük az érintő egyenletét iránytényezős alakban! Az A-n átmenő egyenesek vagy $e : y - 8 = m(x - 6)$, vagy $e : x = 6$ alakúak. Utóbbi esetben nem kapunk érintőt, mert az $x = 6$ egyenletű egyenes az $x^2 + y^2 = 64$ egyenletű kört két pontban metszi (ezek első koordinátája $x = 6$, második koordinátája $\pm 2\sqrt{7}$).

Az érintők egyenletét tehát $e : y = mx - 6m + 8$ alakban kereshetjük. Tekintsük az e és a k egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx - 6m + 8 \\ x^2 + y^2 &= 64 \end{aligned}\right\}$$

A közös pontok meghatározásához az első egyenletből kifejezett y-t a második egyenletbe írjuk:

$$\begin{aligned} x^2 + (mx - 6m + 8)^2 &= 64 \\ x^2 + m^2x^2 + 36m^2 + 64 - 12m^2x + 16mx - 96m &= 64 \\ \left(1 + m^2\right) x^2 + \left(-12m^2 + 16m\right) x + 36m^2 - 96m &= 0 \end{aligned}$$

Amennyiben e érinti a k kört, úgy ennek a másodfokú egyenletnek egy megoldása van. Ez pontosan akkor teljesül, ha a diszkriminánsa 0, azaz

$$\begin{aligned} \left(-12m^2 + 16m\right)^2 - 4\left(1 + m^2\right)\left(36m^2 - 96m\right) &= 0 \\ (4m(-3m + 4))^2 - 4\left(1 + m^2\right) \cdot 12m(3m - 8) &= 0 \\ 16m^2(-3m + 4)^2 - 16 \cdot 3m\left(1 + m^2\right)(3m - 8) &= 0 \end{aligned}$$

A kapott egyenletnek $m = 0$ megoldása. Ebből az érintőre az $e : y = 8$ egyenletet kapjuk, amely az 1.20. ábrával összevetve azt jelenti, hogy $\underline{b : y = 8}$.

Dolgozzunk tovább! Ha $m \neq 0$, akkor a kapott egyenletet oszthatjuk $16m$-mel:

$$\begin{aligned} m(-3m + 4)^2 - 3\left(1 + m^2\right)(3m - 8) &= 0 \\ m\left(9m^2 - 24m + 16\right) - 3\left(3m - 8 + 3m^3 - 8m^2\right) &= 0 \\ 9m^3 - 24m^2 + 16m - 9m + 24 - 9m^3 + 24m^2 &= 0 \\ 7m &= -24 \\ m &= -\frac{24}{7} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve e egyenletébe: $e : y = -\frac{24}{7}x + \frac{200}{7}$, ez az 1.20. ábrán látható c egyenes egyenlete. Felszorozva és rendezve: $\underline{c : 24x + 7y = 200}$.

$B = a \cap c$, így megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 24x + 7y &= 200 \\ 3x + 4y &= -40 \end{aligned}\right\}$$

Szorozzuk a második egyenletet 8-cal:

$$\left.\begin{aligned} 24x + 7y &= 200 \\ 24x + 32y &= -320 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$25y = -520$$
$$y = -\frac{104}{5}$$

Visszahelyettesítve például a második egyenletbe:

$$3x + 4 \cdot \left(-\frac{104}{5}\right) = -40$$
$$x = \frac{72}{5}$$

Eszerint $\underline{\underline{B\left(\frac{72}{5}; -\frac{104}{5}\right)}}$.

Végül $C = a \cap b$, vagyis megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} y &= 8 \\ 3x + 4y &= -40 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből az y-ra kapott értéket a második egyenletbe helyettesítve:

$$3x + 4 \cdot 8 = -40$$
$$x = -24$$

Eszerint $\underline{\underline{C(-24; 8)}}$.

1.2.5. Kör adott pontbeli érintője

1.75. Feladat. [[2] 3943. a)] Írjuk fel az $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ kör $(5; 5)$ pontjához tartozó érintőjének egyenletét.

Megoldás. Legyen $A(5; 5)$. A $k : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ egyenletű kör középpontja $K(1; 2)$, sugara: $r = 5$. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Emiatt a keresett e érintő egy normálvektora: $\mathbf{n}_e = \overrightarrow{KA} = \mathbf{a} - \mathbf{k} = (4; 3)$. Mivel $A \in e$, ezért e egyenlete: $e : 4x + 3y = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5$, azaz $\underline{\underline{e : 4x + 3y = 35}}$.

1.76. Megjegyzés. Az 1.75. feladat gondolatmenete általánosítható, és igen szép eredményre vezet. Legyen egy k kör egyenlete:

$$k : (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2,$$

ekkor középpontja $K(u; v)$, sugara r. Legyen $P(x_0; y_0)$ a k kör tetszőleges pontja, ekkor

$$(x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2 = r^2 \tag{1.14}$$

is teljesül. Írjuk fel a P-beli e érintő egyenletét! e egy normálvektora: $\mathbf{n}_e = \overrightarrow{KP} = \mathbf{p} - \mathbf{k} = (x_0 - u; y_0 - v)$. Másfelől $P(x_0; y_0) \in e$, így e egyenlete:

$$(x_0 - u)\,x + (y_0 - v)\,y = (x_0 - u) \cdot x_0 + (y_0 - v) \cdot y_0$$
$$(x_0 - u)(x - x_0) + (y_0 - v)(y - y_0) = 0 \tag{1.15}$$

Adjuk össze az (1.14) és az (1.15) egyenleteket:

$$\begin{aligned}(x_0-u)^2+\left(y_0-v\right)^2+(x_0-u)(x-x_0)+\left(y_0-v\right)\left(y-y_0\right)&=r^2\\(x_0-u)(x_0-u+x-x_0)+\left(y_0-v\right)\left(y_0-v+y-y_0\right)&=r^2\\(x_0-u)(x-u)+\left(y_0-v\right)\left(y-v\right)&=r^2\end{aligned}$$

A kapott egyenlet nevezetes, és könnyen megjegyezhető: a kör egyenletében a bal oldali második hatványok *felébe* az érintési pont koordinátáit írjuk, és így az adott pontbeli érintő egyenletét kapjuk. Az eljárást *felébe-helyettesítésnek* nevezik. Érdemes önmagában is állításként megfogalmazni.

1.77. Állítás. [felébehelyettesítés] Az $(x-u)^2+\left(y-v\right)^2=r^2$ egyenletű kör $P(x_0;y_0)$ pontbeli érintőjének egyenlete:

$$(x_0-u)(x-u)+\left(y_0-v\right)\left(y-v\right)=r^2.$$

Az 1.75. feladatban például a felébehelyettesítéssel az

$$(5-1)(x-1)+(5-2)\left(y-2\right)=25$$

egyenletet nyerjük, amely a szorzások elvégzésével és rendezéssel a $4x+3y=35$ egyenletet adja.

1.2.6. Két kör kölcsönös helyzete

Amennyiben egy $P(x;y)$ pont a k_1 körnek, illetve a k_2 körnek is pontja, úgy P kielégíti k_1 és k_2 egyenletét is. Ebből adódik, hogy $P(x;y)$ pont pontosan akkor metszéspontja a k_1 és a k_2 körnek, ha az $(x;y)$ számpár megoldja a k_1 és k_2 egyenletéből álló egyenletrendszert.

Ez az egyenletrendszer már két kétismeretlenes másodfokú egyenletből áll. Megoldási stratégiánk a következő:

1. Hozzuk a körök egyenletét $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$ alakúra, ahol mindkét egyenletben ugyanaz x^2-ek együtthatója.
2. Vonjuk ki egymásból az egyenleteket, ezzel lineáris egyenletet kapva.
3. Fejezzük ki a kapott egyenletből valamelyik változót, majd helyettesítsük be valamely kör egyenletébe.
4. Így másodfokú egyenletet kapunk. Oldjuk meg, majd a lineáris egyenlet segítségével határozzuk meg a megoldásokhoz tartozó másik ismeretlen értékét is.

1.78. Következmény. Mivel körök metszésponjainak meghatározásakor végső soron másodfokú egyenletet kell megoldanunk, ennek lehet 0, 1 vagy 2 megoldása diszkriminánsának előjelétől függően. Ennek megfelelően két kör is legfeljebb csak 2 pontban metszheti egymást, és lehet 0, vagy 1 metszéspontjuk is. Utóbbi esetben a körök *érintik egymást*, a megfelelő másodfokú egyenlet diszrkiminánsa pedig 0.

Emlék. Tekintsük az O_1, illetve O_2 középpontú köröket a síkon, sugaraik rendre r_1, illetve r_2. Ekkor ha a körök kívülről érintik egymást, akkor $\left|\overline{O_1O_2}\right|=r_1+r_2$, ha pedig belülről érintik egymást, akkor $\left|\overline{O_1O_2}\right|=|r_1-r_2|$. Mivel pontok távolságára van képletünk, ezek a feltételek is számolhatók koordinátageometriai eszközökkel.

1.79. Feladat ([2] 3980)**.** Vizsgáljuk meg, hogy van-e közös pontja a következő egyenletekkel megadott köröknek? Számítsuk ki a közös pont (pontok) koordinátáit, miután ellenőriztük, hogy az adott egyenlet valóban kör egyenelete-e.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0; x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0;$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0; x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0;$

c) $x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 = 0; x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0;$

d) $x^2 + y^2 + 2x = 0; x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0.$

Megoldás. a) Legyen $k_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$.

k_1 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 3 &= 0 \\ (x-1)^2 + \left(y-2\right)^2 &= 8 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_1(1; 2)$, sugara $r_1 = 2\sqrt{2}$.

k_2 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 5 &= 0 \\ (x-2)^2 + \left(y-3\right)^2 &= 18 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_2(2; 3)$, sugara $r_2 = 3\sqrt{2}$.

A metszéspontok koordinátái a következő egyenletrendszer megoldásaiként adódnak:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2 &= 0 \\ y &= -x - 1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Helyettesítsük ezt be k_1 egyenletébe:

$$\begin{aligned} x^2 + (-x-1)^2 - 2x - 4\left(-x-1\right) - 3 &= 0 \\ x^2 + x^2 + 2x + 1 - 2x + 4x + 4 - 3 &= 0 \\ 2x^2 + 4x + 2 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Behelyettestve ezt az (1.16) egyenletbe: $y = -(-1) - 1 = 0$ adódik, vagyis k_1 és k_2 körök az $\underline{\underline{A(-1;0)}}$ pontban metszik egymást, azaz érintkező körök. Hogy belülről vagy kívülről értinik egymást, az középpontjaik távolságától függ.

$$\left|\overline{K_1K_2}\right| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2} = r_2 - r_1,$$

azaz belülről érintik egymást.

b) Legyen $k_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$.

k_1 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 1 &= 0 \\ (x-1)^2 + \left(y+2\right)^2 &= 6 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_1(1;-2)$, sugara $r_1 = \sqrt{6}$.

k_2 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y - 3 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 3 &= 0 \\ x^2 + (x-3)^2 &= 12 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_2(0;3)$, sugara $r_2 = 2\sqrt{3}$.

A metszéspontok koordinátái a következő egyenletrendszer megoldásaiként adódnak:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$\begin{aligned} 2x - 10y - 2 &= 0 \\ x - 5y - 1 &= 0 \\ x &= 5y - 1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Helyettesítsük ezt be k_2 egyenletébe:

$$\begin{aligned} \left(5y-1\right)^2 + y^2 - 6y - 3 &= 0 \\ 25y^2 - 10y + 1 + y^2 - 6y - 3 &= 0 \\ 26y^2 - 10y - 2 &= 0 \\ 13y^2 - 5y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldásai:

$$y_1 = \frac{5 - \sqrt{77}}{26}, \quad y_2 = \frac{5 + \sqrt{77}}{26}.$$

Az (1.17) egyenletből kapjuk a megfelelő x értékeket:

$$x_1 = \frac{-1 - 5\sqrt{77}}{26}, \quad x_2 = \frac{-1 + 5\sqrt{77}}{26}.$$

A két kör metszéspontjai tehát

$$\underline{\underline{A\left(\frac{-1 - 5\sqrt{77}}{26}; \frac{5 - \sqrt{77}}{26}\right)}}, \quad \underline{\underline{B\left(\frac{-1 + 5\sqrt{77}}{26}; \frac{5 + \sqrt{77}}{26}\right)}}.$$

c) Legyen $k_1 : x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

k_1 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 &= 0 \\ x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 - 8y + 16 - 16 - 4 &= 0 \\ (x-5)^2 + (y-4)^2 &= 45 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_1(5; 4)$, sugara $r_1 = 3\sqrt{5}$.

k_2 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 4y &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 5 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_2(1; 2)$, sugara $r_2 = \sqrt{5}$.

A metszéspontok koordinátái a következő egyenletrendszer megoldásaiként adódnak:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$\begin{aligned} 8x + 4y + 4 &= 0 \\ 2x + y + 1 &= 0 \\ y &= -2x - 1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Helyettestsük ezt be k_2 egyenletébe:

$$\begin{aligned} x^2 + (-2x-1)^2 - 2x - 4(-2x-1) &= 0 \\ x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 2x + 8x + 4 &= 0 \\ 5x^2 + 10x + 5 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Behelyettestve ezt az (1.18) egyenletbe: $y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$ adódik, vagyis k_1 és k_2 körök az $\underline{\underline{A(-1;1)}}$ pontban metszik egymást, azaz érintkező körök. Középpontjaik távolsága:

$$\left|\overline{K_1K_2}\right| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5} = r_1 - r_2,$$

vagyis belülről érintik egymást.

d) Legyen $k_1 : x^2 + y^2 + 2x = 0$, $k_2 : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$.

k_1 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 &= 0 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_1(-1;0)$, sugara $r_1 = 1$.

k_2 valóban kör egyenlete:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 2 &= 0 \\ (x-3)^2 + \left(y-3\right)^2 &= 16 \end{aligned}$$

vagyis középpontja $K_2(3;3)$, sugara $r_2 = 4$.

A metszéspontok koordinátái a következő egyenletrendszer megoldásaiként adódnak:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\begin{aligned} 8x + 6y - 2 &= 0 \\ x &= -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Helyettesítsük ezt be k_1 egyenletébe:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 + 2\left(-\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{8}y + \frac{1}{16} + y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{25}{16}y^2 - \frac{15}{8}y + \frac{9}{16} &= 0 \\ 25y^2 - 30y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenletnek egyetlen valós megoldása van, $y = \frac{3}{5}$, amit az (1.19) egyenletbe helyettesítve $x = -\frac{1}{5}$ adódik, vagyis k_1 és k_2 körök az $\underline{\underline{A\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)}}$ pontban metszik egymást, azaz érintkező körök.

Középpontjaik távolsága:

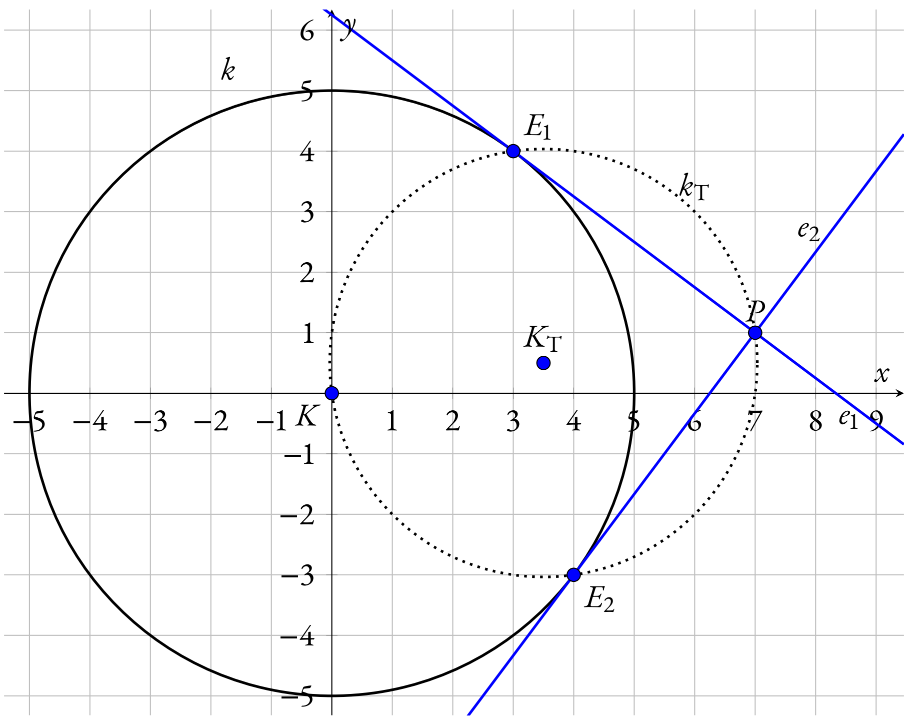
$$\left|\overline{K_1K_2}\right| = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = 5 = r_1 + r_2,$$

vagyis kívülről érintik egymást.

Emlék. Körhöz külső pontból érintőt a Thalész-tétel alkalmazásával szerkeszthetünk: mivel kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárral, ezért vegyük a külső pont és a kör középpontja által meghatározott szakasz Thalész-körét. Ezen kör és az eredeti kör metszéspontjai kijelölik az érintők metszéspontjait, és két pont ismeretében már az érintő szerkeszthető. Ennek az eljárásnak koordinátageometriai környezetbe ültetésével újabb módszert nyerünk körhöz külső pontjából történő érintő egyenletének felírására.

1.80. Feladat. [[2] 3935. b)] Írjuk fel a $(7; 1)$ pontból az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körhöz húzható érintők egyenletét. Számítsuk ki az érintési pontok koordinátáit, az érintőszakaszok hosszát és az érintők hajlásszögét.

Megoldás. Ezt a feladatot már megoldottuk (lásd 1.72. feladat). Most másik megoldást mutatunk rá. Ez a megoldás az elemi geometriai gondolatok koordinátageometriai környezetbe történő átültetése. Legyen $k : x^2 + y^2 = 25$, a kör középpontja $K(0; 0)$, a külső pont $P(7; 1)$ (lásd az 1.21. ábrát).



1.21. ábra

1. Felírjuk a $\overline{KP}$ szakasz k_T Thalész-körének egyenletét.

2. Meghatározzuk k és k_T körök metszéspontjait, ezek az E_1, illetve E_2 érintési pontokat adják meg.

3. Felírjuk a P, illetve E_1 pontokon átmenő, továbbá a P, illetve E_2 pontokon átmenő egyenesek egyenletét: ezek éppen az érintők egyenleteit adják.

Lássunk hozzá: a $\overline{KP}$ szakasz Thalész-körének középpontja az $\overline{KP}$ szakasz F felezőpontja: $F\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, sugárnégyzete:

$$r_T^2 = \left|\overline{FK}\right|^2 = \left(\frac{7}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Így a Thalész-kör egyenlete:

$$k_T : \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Ezután meghatározzuk k és k_T metszéspontjait. Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{2} \end{aligned}\right\}$$

Bontsuk fel a zárójeleket a második egyenlet bal oldalán, majd rendezzük az egyenletet:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \\ x^2-7x+y^2-y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki a felső egyenletből az alsót:

$$\begin{aligned} 7x+y &= 25 \\ y &= -7x+25 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Írjuk ezt be k egyenletébe:

$$\begin{aligned} x^2+(-7x+25)^2 &= 25 \\ x^2+49x^2-350x+625 &= 25 \\ 50x^2-350x+600 &= 0 \\ x^2-7x+12 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldásai: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. A megfelelő y értékek az (1.20) egyenletből: $y_1 = 4$, $y_2 = -3$, így a megfelelő érintési pontok $\underline{\underline{E_1(3;4)}}$, $\underline{\underline{E_2(4;-3)}}$.

Az e_1 érintő legyen az, amelyik az E_1 és a P pontokon megy át. Ennek egy irányvektora: $\mathbf{v}_{e_1} = \overrightarrow{E_1P} = \mathbf{p}-\mathbf{e}_1 = (4;-3)$, egy normálvektora $\mathbf{n}_{e_1} = (3;4)$. Mivel $P \in e_1$, ezért e_1 egyenlete: $e_1 : 3x+4y = 3\cdot 7+4\cdot 1$, azaz $\underline{\underline{e_1 : 3x+4y = 25}}$.

Az e_2 érintő menjen át az E_2, illetve a P pontokon. Egy irányvektora: $\mathbf{v}_{e_2} = \overrightarrow{E_2P} = \mathbf{p}-\mathbf{e}_2 = (3;4)$, egy normálvektora $\mathbf{n}_{e_2} = (4;-3)$. Mivel $P \in e_2$, ezért e_2 egyenlete: $e_2 : 4x-3y = 4\cdot 7-3\cdot 1$, azaz $\underline{\underline{e_2 : 4x-3y = 25}}$.

A feladat megoldásának további része megegyezik az 1.72. feladat megoldásával.

1.81. Megjegyzés. Az 1.72. feladatban tisztán algebrai, míg az 1.80. feladatban elemi geometriai módszereket is felhasználva írtuk fel körhöz külső pontból húzott érintő egyenletét. Ízlés kérdése, melyik megoldást tartjuk célravezetőbbnek, az algebrai megoldás tisztán koordinátageometriai, de jellemzően technikás számolás, az elemi geometriai módszer koordinátageometriai végigszámolása körök metszéspontjainak meghatározását is igényli, ami pusztán az érintők egyenletének szempontjából nem szükséges.

1.2.7. Két kör hatványvonala

Motiváció. Körök metszéspontjainak meghatározásakor a körök egyenleteit kivontuk egymástól, majd az így kapott lineáris egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve, azt a másik egyenletbe írva dolgoztunk tovább. Amennyiben két kör középpontja nem esik egybe, a körök egyenleteinek különbségeként előálló egyenlet lineáris, tehát egyenes egyenlete. Mit mondhatunk erről az egyenesről?

Emlék. A különböző középpontú körök középpontjai által meghatározott egyenest a körök *centrálisának* nevezzük.

1.82. Feladat ([1] 205/6 nyomán)**.** Bizonyítsuk be, hogy ha két különböző középpontú kör kanonikus egyenletét kivonjuk egymásból, akkor olyan egyenes egyenletét kapjuk, amely a körök centrálisára merőleges!

Megoldás. Legyen a két kör kanonikus egyenlete: $k_1 : (x-u_1)^2+\left(y-v_1\right)^2 = r_1^2, k_2 : (x-u_2)^2+\left(y-v_2\right)^2 = r_2^2$, ekkor a k_1 kör középpontja $K_1(u_1; v_1)$, sugara r_1, a k_2 kör középpontja $K_2(u_2; v_2)$, sugara r_2, és tegyük fel, hogy $u_1 \neq u_2$ vagy $v_1 \neq v_2$. Bontsuk fel a zárójeleket a körök egyenleteiben:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2u_1x + u_1^2 + y^2 - 2v_1y + v_1^2 &= r_1^2 \\ x^2 - 2u_2x + u_2^2 + y^2 - 2v_2y + v_2^2 &= r_2^2 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt! Rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$h : 2\left(u_1-u_2\right)x + 2\left(v_1-v_2\right)y = r_2^2 - r_1^2 + u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2. \tag{1.21}$$

h valóban egyenes egyenlete, mivel u_1-u_2 és v_1-v_2 közül legalább az egyik nem nulla. h egy normálvektora: $\mathbf{n}_h = (u_1-u_2; v_1-v_2)$ – az egyenletből leolvasható értéket 2-vel osztottuk.

Másrészt a körök középpontjai által meghatározott vektor: $\overrightarrow{K_2K_1} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = (u_1-u_2; v_1-v_2)$, ami éppen $\mathbf{n}_h$. Mivel $\overrightarrow{K_2K_1}$ a körök centrálisának egy irányvektora, ebből már következik, hogy h merőleges a centrálisra.

1.83. Definíció. A különböző középpontú körök kanonikus egyenleteinek különbségeként adódó h egyenest a körök *hatványvonalának* nevezzük.

Motiváció. Miért hívjuk a kapott egyenest a két kör hatványvonalának? Meg fogjuk mutatni, hogy a hatványvonal pontjai pontosan azon a pontok a síkon, melyeknek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik.

Emlék. Adott a síkon egy k kör és egy P pont. A P pont *körre vonatkozó hatványának* a $h_k(P) = d^2 - r^2$ kifejezést nevezzük, ahol r a kör sugara, d a P pont és a kör középpontjának távolsága. $h_k(P) = 0$, ha P a körön van, $h_k(P) < 0$, ha P a körön belül van és $h_k(P) > 0$, ha P a körön kívül van. Ez utóbbi esetben Pitagorasz-tételéből következik, hogy $h_k(P)$ éppen a P-ből a körhöz húzott érintőszakasz hosszának négyzete.

Nézzük mindezt a koordináta-rendszerben: legyen $P(x_0; y_0)$, $k : (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$, középpontja $K(u, v)$, sugara r. Ekkor

$$h_k(P) = \left|\overline{PK}\right|^2 - r^2 = (x_0 - u)^2 + (y_0 - v)^2 - r^2. \tag{1.22}$$

Emiatt érdemes a kör kanonikus egyenletét 0-ra rendezni, és ebben az alakban tekinteni:

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0.$$

Ezt az alakot a kör *normálegyenletének* nevezik. Az (1.22) számolásból következik, hogy egy pont körre vonatkozó hatványát megkapjuk, ha a pont koordinátáit a kör normálegyenletének bal oldalába helyettesítjük. Ismert egyenletű kör esetén tehát bármely pont körre vonatkozó hatványának számolása puszta behelyettesítés. Ezt az észrevételt használjuk fel a következő tétel bizonyításában.

1.84. Tétel. Tekintsünk két különböző középpontú kört a síkon. A sík azon pontjainak halmaza, melyeknek a két körre vonatkozó hatványai megegyeznek, éppen a körök hatványvonala.

Bizonyítás. Legyenek a szóban forgó körök kanonikus egyenletei: $k_1 : (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 = r_1^2$, illetve $k_2 : (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 = r_2^2$, ekkor a körök középpontjai rendre $K_1(u_1; v_1)$, $K_2(u_2; v_2)$, sugarai rendre r_1, r_2, és $u_1 \neq u_2$ vagy $v_1 \neq v_2$. Tegyük fel, hogy $P(x_0; y_0)$ olyan pont a síkon, melynek k_1, illetve k_2 körre vonatkozó hatványa megegyezik. Ebből a feltételből kiindulva végezzünk ekvivalens átalakításokat:

$$h_{k_1}(P) = h_{k_2}(P) \tag{1.23}$$

$$(x_0-u_1)^2 + (y_0-v_1)^2 - r_1^2 = (x_0-u_2)^2 + (y_0-v_2)^2 - r_2^2$$

$$x_0^2 - 2u_1x_0 + u_1^2 + y_0^2 - 2v_1y_0 + v_0^2 - r_1^2 = x_0^2 - 2u_2x + u_2^2 + y_0^2 - 2v_2y_0 + v_2^2 - r_2^2$$

$$r_2^2 - r_1^2 + u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2 = 2(u_1-u_2)x_0 + 2(v_1-v_2)y_0 \tag{1.24}$$

Az (1.21) egyenlettel összevetve az (1.24) összefüggés éppen azt jelenti, hogy P a körök hatványvonalán van. Az (1.23) összefüggést viszont azt jelenti, hogy P-nek a k_1, illetve k_2 körökre vonatkozó hatványa megegyezik. Mivel minden átalakításunk ekvivalens volt, e két tulajdonság valóban ekvivalens egymással, azaz a sík pontjai közül éppen a hatványvonal pontjai azok, mely pontoknak a körökre vonatkozó hatványai megegyeznek. □

1.85. Következmény. Ha a két körnek van közös pontja, akkor a hatványvonal illeszkedik a közös pontra (hiszen a közös pontok körökre vonatkozó hatványai éppen 0-k). Ebből adódik, hogy amennyiben a két kör két pontban metszi egymást, úgy a hatványvonal a metszéspontokra illeszkedő egyenes. Ha a két kör kívülről érinti egymást, akkor a hatványvonal a közös belső érintő. Ha pedig a két kör belülről érinti egymást, akkor a hatványvonal a közös külső érintő. További nevezetes következmény a következő állítás.

1.86. Állítás. Tekintsünk két különböző sugarú kört a síkon. A sík azon pontjainak halmaza, melyekből a körökhöz azonos hosszúságú érintőszakaszok húzhatóak, a körök hatványvonalának körökön kívüli része.

Bizonyítás. Vegyünk egy P pontot a két kör hatványvonaláról. A körök hatványvonalának körökön kívüli részére is igaz, hogy az itteni pontoknak a két körre vonatkozó hatványa ugyanaz. Mivel most a P pont mindkét körön kívül található, ezért ez a hatvány éppen a P-ből a körökhöz húzott érintőszakasz hosszának négyzete. Ha az érintőszakasz hosszának négyzete megegyezik mindkét kör esetén, akkor természetesen maga a P-ből a két körhöz húzott érintőszakasz is egyenlő hosszúságú.

Ha most P olyan pont a síkon, melyből a körökhöz azonos hosszúságú érintőszakaszok húzhatók, akkor e pont egyrészt a körökön kívül található, másrészt az érintőszakaszok hosszának egyenlőségéből a szakaszhosszak négyzetének, s így a P körökre vonatkozó hatványainak egyenlősége következik. Azt pedig korábban láttuk, hogy ha P hatványa a két körre egyenlő, akkor P rajta van a két kör hatványvonalán. □

1.87. Állítás. Tekintsünk három különböző középpontú kört a síkon, melyek középpontjai nem esnek egy egyenesre. Ekkor a körök páronként vett hatványvonalai egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás. Legyenek k_1, k_2, k_3 különböző, nem egy egyenesre eső középpontú körök. Legyen k_1 és k_2 hatványvonala h_3, k_2 és k_3 hatványvonala h_1, k_3 és k_1 hatványvonala k_2. Mivel a középpontok nem esnek egy egyenesre, ezért h_1 és h_2 egy pontban metszi egymást, legyen ez a pont H. Mivel $H \in h_1$, ezért H-nak a k_2 és a k_3 körökre vonatkozó hatványa egyenlő. Mivel $H \in h_2$, ezért H-nak a k_1 és a k_3 körökre vonatkozó hatványa is egyenlő. Ekkor viszont H-nak a k_1 és k_2 körökre vonatkozó hatványa is egyenlő, vagyis $H \in h_3$ is igaz. A három hatványvonal tehát egy pontban metszi egymást. □

1.88. Definíció. Tekintsünk három különböző középpontú kört a síkon, melyek középpontjai nem esnek egy egyenesre. Ekkor e három kör páronkénti hatványvonalainak metszéspontja a három kör *hatványpontja*.

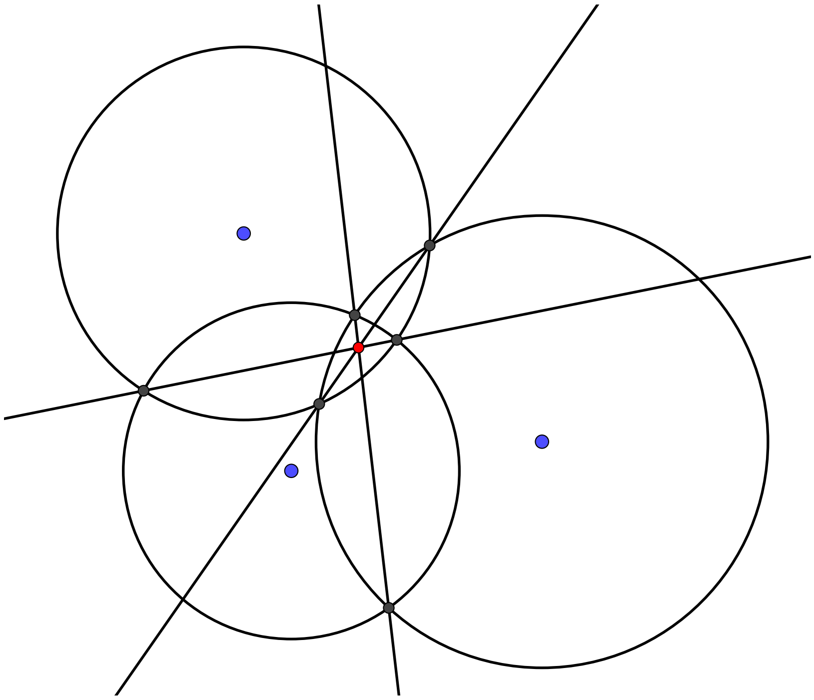
1.89. Következmény. A hatványpont a sík egyetlen pontja, melynek a három kör mindegyikére vonatkozó hatványa ugyanaz. Amennyiben a hatványpont mindhárom körön kívül helyezkedik el, úgy a hatványpont a sík egyetlen pontja, melyből a három körhöz egyenlő hosszúságú érintőszakaszok húzhatóak.

1.90. Megjegyzés. Figyelembe véve, hogy egymást két pontban metsző körök hatványvonala éppen a metszéspontokra illeszkedő egyenes, az 1.87. állítás egy szép speciális esete a következő: tekintsünk a síkon három különböző középpontú kört, melyek közül bármely kettő két pontban metszi egymást. Ekkor a páronkénti metszéspontokon át illesztett egyenesek egy pontban metszik egymást (1.22. ábra).

1.91. Megjegyzés. A hatványvonal természetesen koordinátageometriai eszközök nélkül is definiálható, amikor is azon pontok halmazát keressük a síkon, melyeknek két adott körre vonatkozó hatványuk megegyezik. Kiderül, hogy a szóban forgó alakzat egy egyenes, mely a centrálisra merőleges. Ugyanakkor a koordinátageometria egyik legszebb eredménye számunkra, hogy ez az – egyébként elemi geometriai – állítás koordinátageometriai eszközökkel elemi algebrai számolással igazolható. Az 1.87. állítást már eleve koordinátageometriai eszközök nélkül bizonyítottuk.

1.2.8. Érintkező körök

Motiváció. Az érintkező körökre vonatkozó feladatok megoldása során többnyire körök egyenleteit keressük. Amennyiben a kör sugara, illetve középpontja ismert, a feladatot meg is oldottuk. A középpont kereséséhez egyrészt felhasználhatjuk, hogy érintkező körök középpontjainak távolsága a sugarak összege/különbségabszolútértéke, attól függően, hogy a körök kívülről/belülről érintik egymást. Másrészt ügyes trükk annak kihasználása, hogy miközben nyilvánvaló, hogy egy kör adott pontja sugárnyi távolságra van a középponttól, az is igaz, hogy a középpont sugárnyi távolságra van a kör valamely ismert pontjától. A még ismeretlen kör sugarának és egy adott pontjának ismeretében így a középpontot egy adott sugarú, középpontú körön kereshetjük.



1.22. ábra

1.92. Feladat. [[2] 3988] Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelynek sugara $\sqrt{8}$, áthalad a $P(-1;3)$ ponton és az $(x+2)^2+(y+2)^2=2$ egyenletű kört kívülről érinti.

Megoldás. Legyen a keresett kör k, ekkor egyenlete: $k:(x-u)^2+\left(y-v\right)^2=8$, hiszen sugara $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ egység. Egyedül $K(u;v)$ középpontja ismeretlen. Mivel $P\in k$, ezért

$$(-1-u)^2+(3-v)^2=8. \tag{1.25}$$

Másrészt k kívülről érinti a $k_1:(x+2)^2+\left(y+2\right)^2=2$ egyenletű kört. Ennek középpontja $K_1=(-2;-2)$, sugara $r_1=\sqrt{2}$. A kívülről érintés miatt $\left|\overline{KK_1}\right|=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, melyből a következő egyenletet nyerjük:

$$(u+2)^2+(v+2)^2=18. \tag{1.26}$$

Oldjuk meg az (1.25) és az (1.26) egyenletekből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(-1-u)^2+(3-v)^2&=8\\(u+2)^2+(v+2)^2&=18\end{aligned}\right\}$$

Bontsuk fel a zárójeleket:

$$\left.\begin{aligned}1+2u+u^2+9-6v+v^2&=8\\4+4u+u^2+4+4v+v^2&=18\end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$\begin{aligned}3+2u-5+10v&=10\\2u+10v&=12\\u+5v&=6\\u&=6-5v\end{aligned} \tag{1.27}$$

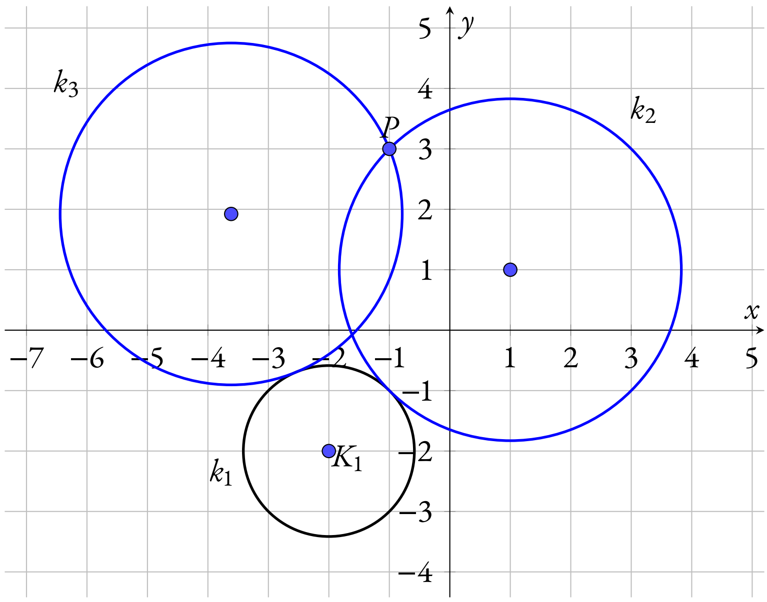
Helyettesítsünk be például az (1.26) egyenletbe:

$$
\begin{aligned}
(6-5v+2)^2+(v+2)^2&=18\\
(8-5v)^2+(v+2)^2&=18\\
64-80v+25v^2+v^2+4v+4&=18\\
26v^2-76v+50&=0\\
13v^2-38v+25&=0
\end{aligned}
$$

Ennek megoldásai $v_1=1$, $v_2=\dfrac{25}{13}$. Visszahelyettesítve az (1.27) egyenletbe, a megfelelő u értékek: $u_1=1$, $u_2=-\dfrac{47}{13}$. Két megoldást kaptunk tehát: a megfelelő körök egyenletei

$$\underline{\underline{k_2:(x-1)^2+(y-1)^2=8}};\quad \underline{\underline{k_3:\left(x+\frac{47}{13}\right)^2+\left(y-\frac{25}{13}\right)^2=8.}}$$

A kapott megoldásokat az 1.23. ábrán ábrázoltuk.



1.23. ábra

1.93. Megjegyzés. Az 1.92. feladat egy másik lehetséges megoldása a következő: legyen a keresett kör egyenlete $k:(x-u)^2+(y-u)^2=8$, ekkor középpontja a $K(u;v)$ pont. Mivel $P(-1;3)\in k$, ezért P és K távolsága $\sqrt{8}$, azaz K rajta van a P középpontú $\sqrt{8}$ sugarú körön, azaz

$$(u+1)^2+(v-3)^2=8. \tag{1.28}$$

Másrészt a kívülről érintés miatt a keresett K középpont $2\sqrt{2}+\sqrt{2}$ távolságra van a $(-2;-2)$ ponttól, azaz K rajta van a $(-2;-2)$ középpontú, $3\sqrt{2}$ sugarú körön is:

$$(u+2)^2+(v+2)^2=18. \tag{1.29}$$

Megoldandó az (1.28) és az (1.29) egyenletekből álló egyenletrendszer, amely ekvivalens a korábbi megoldásban látott egyenletrendszerrel.

1.3. A parabola koordinátageometriája

1.3.1. A parabola egyenlete

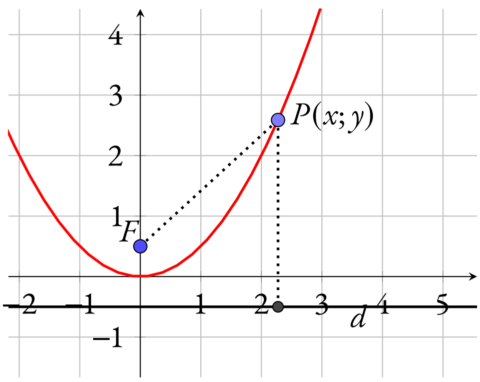
Emlék. A parabola azon pontok halmaza a síkon, melyek a sík egy adott pontjától és rá nem illeszkedő egyenesétől egyenlő távolságra vannak. A szóban forgó pont a parabola *fókuszpontja* vagy röviden *fókusza*, az egyenes a parabola *vezéregyenese* vagy *direktrixe*. A fókusz és a vezéregyenes távolsága a parabola *paramétere*. A definícióból következik, hogy a parabola tengelyesen szimmetrikus ponthalmaz, szimmetriatengelye a fókuszon átmenő, a vezéregyenesre merőleges egyenes, melyet a parabola *tengelyének* nevezünk. A parabolának pontosan egy pontja található a tengelyen, melyet a parabola *tengelypontjának* vagy *csúcsának* nevezünk.

Jelölés. A parabola fókuszát többnyire F, tengelypontját T, vezéregyenesét d, paraméterét p betűvel jelöljük.

A következőkben olyan parabolák egyenletét írjuk fel, melyek tengelyei valamelyik koordinátatengellyel párhuzamosak. Az általános helyzetű parabolák egyenletével mi nem foglalkozunk.

Tegyük fel először, hogy a parabola tengelye az y-tengelyre esik, tengelypontja az origó és paramétere $p > 0$. Ekkor még mindig két lehetőség van a parabola megrajzolására: az egyik parabola *felfelé nyílik*, míg a másik *lefelé nyílik*, és ezek egymás tükörképei.

Legyen a parabola első körben felfelé nyíló, ekkor fókusza az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, vezéregyenese a $d : y = -\frac{p}{2}$ egyenes az 1.24. ábrán látható módon.



1.24. ábra

A P és F pont távolsága ekkor:

$$\mathrm{d}\left(P; F\right) = \left|\overline{PF}\right| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)}.$$

A P és d távolsága pedig

$$\mathrm{d}\left(P; d\right) = y + \frac{p}{2}.$$

A parabola definíciója szerint

$$\mathrm{d}\left(P; F\right) = \mathrm{d}\left(P; d\right)$$

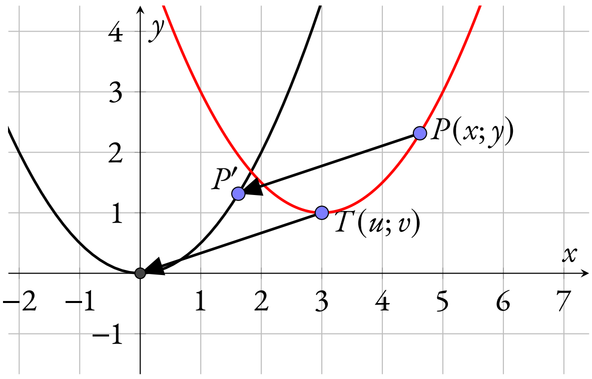
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)} = y + \frac{p}{2}$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, emelhetünk négyzetre:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\
x^2 &= 2py \\
\frac{1}{2p}x^2 &= y
\end{aligned}
$$

A kapott egyenlet *az origó tengelypontú, felfelé nyíló, p paraméterű parabola egyenlete.*

Ezen a ponton könnyen általánosíthatunk: legyen a parabola tengelypontja a $T(u; v)$ pont, paramétere p és továbbra is felfelé nyíló. Toljuk el a $\mathbf{v}\,(-u; -v)$ vektorral a parabolát az 1.25. ábrán látható módon!



1.25. ábra

Amennyiben $P(x; y)$ a parabola egy pontja, a transzformáció után az új koordináták $P'(x - u; y - v)$. Az eltolás után egy origó tengelypontú, felfelé nyíló, p paraméterű parabolát kapunk, melynek pontjai teljesítik az imént bizonyított egyenletet. Ennek megfelelően

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2p}x'^2 \\
y - v &= \frac{1}{2p}(x - u)^2
\end{aligned}
$$

A következő állítást bizonyítottuk:

1.94. Állítás. A $T(u; v)$ tengelypontú, felfelé nyíló, p paraméterű parabola egyenlete

$$y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v.$$

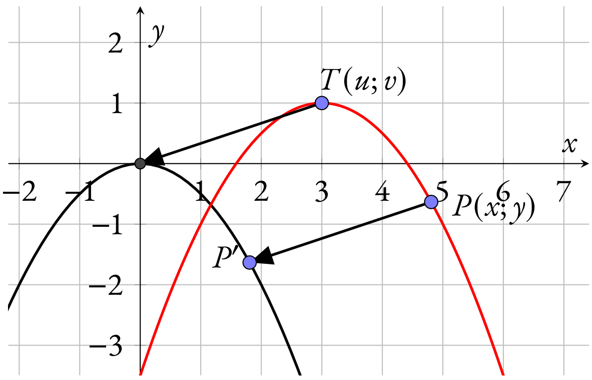
Az előzőekhez hasonlóan igazolhatjuk, hogy *az origó tengelypontú, lefelé nyíló, p paraméterű parabola egyenlete*:

$$y = -\frac{1}{2p}x^2.$$

Az 1.26. ábrán látható módon eltolva a lefelé nyíló, $T(u; v)$ tengelypontú parabolát $\mathbf{v}(-u; -v)$ vektorral, az alábbi állítást kapjuk:

1.95. Állítás. A $T(u;v)$ tengelypontú, lefelé nyíló, p paraméterű parabola egyenlete

$$y = -\frac{1}{2p}(x-u)^2 + v.$$



1.26. ábra

1.96. Megjegyzés. Ha az egyenletek felírása során éppen nem érdekes, hogy a parabola felfelé vagy lefelé nyílik (illetve hogy mi a paramétere), akkor az 1.94. és az 1.95. állításokat tömören is megfogalmazhatjuk: a $T(u;v)$ tengelypontú, y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenlete

$$y = a(x-u)^2 + v, \tag{1.30}$$

ahol $a \neq 0$. Amennyiben $a > 0$, a parabola felfelé nyíló, ha pedig $a < 0$, a parabola lefelé nyíló. Természetesen a fenti alakokkal összevetve ebből az egyenletből is leolvasható a parabola p paramétere.

Az 1.30. egyenletből az is következik, hogy *minden másodfokú függvény grafikonja parabola*, tudniillik az $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ hozzárendelési szabály teljes négyzetté alakítással $f(x) = a(x-u)^2 + v$ alakra hozható. Ezt a tényt eddig elfogadtuk, és csak most bizonyítottuk. Egyben vegyük észre, hogy a parabola ábrázolása a tengelypont és a paraméter ismeretében konzisztens a másodfokú függvény lineáris transzformációinál látottakkal.

Megfordítva a gondolatot: az $y = a(x-u)^2 + v$ alakú parabola-egyenlet $y = ax^2 + bx + c$ alakra hozható. Néha ez az alak használat szempontjából kellemesebb.

A fenti meggondolásokat akkor is megtehetjük, ha a parabola tengelye az x-tengellyel párhuzamos. Ez egy fokkal izgalmasabb gondolat az előzőeknél: itt már a parabola nem egy függvény grafikonja. Geometrailag viszont egyenlete értelmezhető, és a fentiekkel analóg módon adódik, hogy *az origó tengelypontú, jobbra nyíló, p paraméterű parabola egyenlete*

$$x = \frac{1}{2p}y^2,$$

míg *az origó tengelypontú, balra nyíló, p paraméterű parabola egyenlete*

$$x = -\frac{1}{2p}y^2.$$

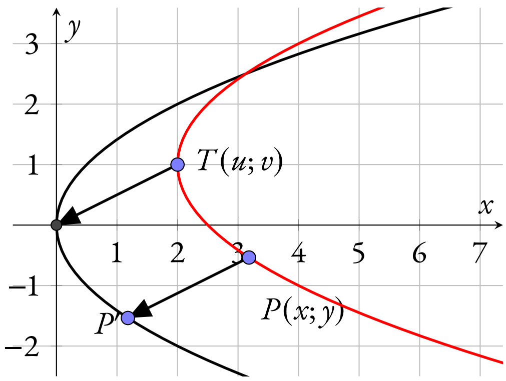
Ha most a parabola tengelypontja a $T(u;v)$ pont, a fentiekkel analóg (az 1.27. ábrán jobbra nyíló parabolán szemléltetett) módon a következő állításokat láthatjuk be.

1.97. Állítás. A $T(u;v)$ tengelypontú, jobbra nyíló, p paraméterű parabola egyenlete

$$x = \frac{1}{2p}\left(y - v\right)^2 + u.$$

1.98. Állítás. A $T(u;v)$ tengelypontú, balra nyíló, p paraméterű parabola egyenlete

$$x = -\frac{1}{2p}\left(y - v\right)^2 + u.$$



1.27. ábra

1.99. Megjegyzés. Ha az egyenletek felírása során éppen nem érdekes, hogy a parabola jobbra vagy balra nyílik (illetve hogy mi a paramétere), akkor az 1.97. és az 1.98. állításokat tömören is megfogalmazhatjuk: a $T(u;v)$ tengelypontú, x-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenlete

$$x = a\left(y - v\right)^2 + u, \tag{1.31}$$

ahol $a \neq 0$. Amennyiben $a > 0$, a parabola jobbra nyíló, ha pedig $a < 0$, a parabola balra nyíló. Természetesen a fenti alakokkal összevetve ebből az egyenletből is leolvasható a parabola p paramétere.

Akárcsak az y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabola esetében, a zárójel felbontásával az (1.31) parabola-egyenlet is $x = ay^2 + by + c$ alakra hozható.

1.100. Definíció. Legyen egy parabola fókusza F, vezéregyenese d. Azt mondjuk, hogy P a parabola *belső pontja*, ha közelebb van F-hez, mint d-hez. Azt mondjuk, hogy P a parabola *külső pontja*, ha közelebb van d-hez, mint P-hez.

1.101. Feladat ([2] 4013)**.** Vizsgáljuk meg, hogy az $(1;2)$, $(-3;1)$, $(6;3)$ és a $(-7;4)$ pontok az $x^2 = 12y$ parabolának belső vagy külső pontjai-e?

Megoldás. A parabola egyenlete $y = \frac{1}{12}x^2$. Ebből leolvashatjuk, hogy tengelypontja az origó, felfelé nyíló és paramétere $p = 6$. Eszerint fókusza $F(0;3)$, vezéregyenesének egyenlete $d : y = -3$.

Az $A(1;2)$ pont távolsága F-től $\mathrm{d}(A;F) = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$, A távolsága d-től $\mathrm{d}(A;d) = 2 - (-3) = 5$ egység. A tehát közelebb van F-hez, mint d-hez, azaz a parabola belső pontja.

A $B(-3;1)$ pont távolsága F-től $\mathrm{d}(B;F) = \left|\overline{BF}\right| = \sqrt{(-3-0)^2+(1-3)^2} = \sqrt{13}$, B távolsága d-től $\mathrm{d}(B;d) = 1-(-3) = 4$ egység. $\sqrt{13} < 4$, mert $13 < 16$ és a gyökfüggvény monoton nő. Emiatt B közelebb van F-hez, mint d-hez, s így B a parabola belső pontja.

A $C(6;3)$ pont távolsága F-től $\mathrm{d}(C;F) = \left|\overline{CF}\right| = \sqrt{(6-0)^2+(3-3)^2} = 6$, C távolsága d-től $\mathrm{d}(C;d) = 3-(-3) = 6$ egység. C tehát egyenlő távolságra van F-től és d-től, így rajta van a parabolán.

A $D(-7;4)$ pont távolsága F-től $\mathrm{d}(D;F) = \left|\overline{DF}\right| = \sqrt{(-7-0)^2+(4-3)^2} = \sqrt{50}$, D távolsága d-től $\mathrm{d}(D;d) = 4-(-3) = 7$ egység. $\sqrt{50} > 7$, mivel $50 > 49$, és a gyökfüggvény szigorúan monoton nő. Emiatt D közelebb van d-hez, mint F-hez, azaz D a parabola külső pontja.

1.102. Feladat ([2] 4017)**.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha

a) a vezéregyenesének egyenlete $y+1=0$, a fókusza a $(4;3)$ pont;

d) a vezéregyenesének egyenlete $x-1=0$, a fókusza a $(4;2)$ pont;

f) a tengelypontja a $(-1;2)$, fókusza a $(-1;4)$ pont;

g) a tengelypontja a $(4;2)$, fókusza a $(8;2)$ pont.

Megoldás. a) A fókusz és a vezéregyenes távolsága $p=4$, a parabola tengelypontja a $T(4;1)$ pont. A parabola felfelé nyílik, így egyenlete: $\underline{\underline{y = \frac{1}{8}(x-4)^2+1}}$ (az 1.28. ábrán kék színnel a parabola és a meghatározó alakzatok).

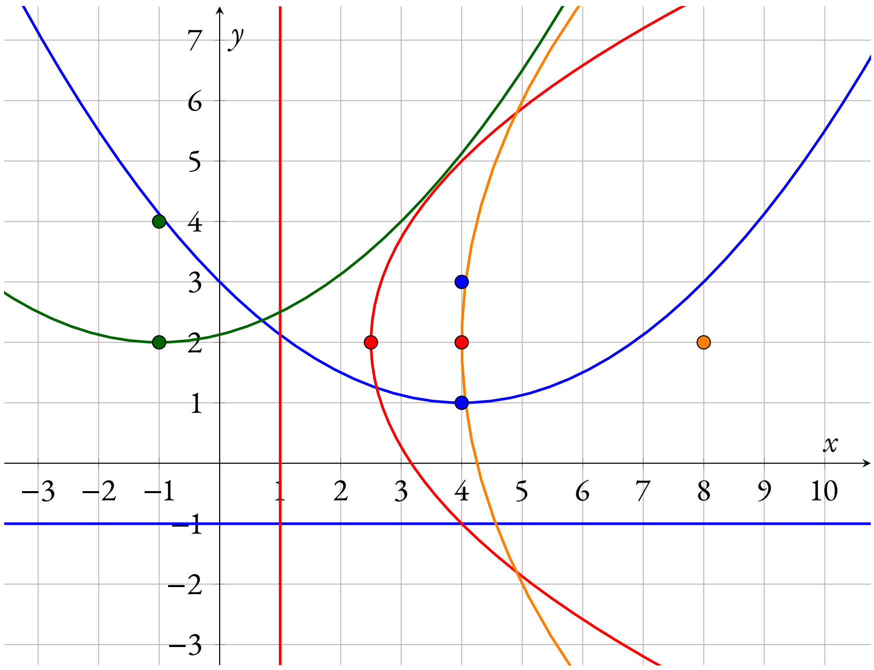
d) A fókusz és a vezéregyenes távolsága $p=3$, a parabola tengelypontja a $T\left(\frac{5}{2};2\right)$. A parabola jobbra nyílik, egyenlete $\underline{\underline{x = \frac{1}{6}(x-2)+\frac{5}{2}}}$ (az 1.28. ábrán piros színnel a parabola és a meghatározó alakzatok).

f) A tengelypont és a fókusz távolsága 2 egység, a parabola paramétere ennek kétszerese: $p=4$. A parabola felfelé nyílik, egyenlete $\underline{\underline{y = \frac{1}{8}(x+1)^2+2}}$ (az 1.28. ábrán zöld színnel a parabola és a meghatározó alakzatok).

g) A tengelypont és a fókusz távolsága 4 egység, a parabola paramétere ennek kétszerese: $p=8$. A parabola jobbra nyílik, egyenlete $\underline{\underline{x = -\frac{1}{16}(y-2)^2+4}}$ (az 1.28. ábrán narancssárga színnel a parabola és a meghatározó alakzatok).

1.103. Feladat ([2] 4020)**.** Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a tengelye párhuzamos az x-tengellyel, paramétere $\frac{1}{2}$, és áthalad a $(-6;4)$ és a $(9;1)$ pontokon.

Megoldás. A parabola egyenlete $x = \frac{1}{2p}(y-v)^2+u$ vagy $x = -\frac{1}{2p}(y-v)^2+u$ alakú. Mivel $p=\frac{1}{2}$, ezért ezekben az egyenletekben csak u és v az ismeretlen. Két esetet különböztetünk meg attól függően, hogy a parabola jobbra vagy balra nyílik.



1.28. ábra

I. eset: A parabola jobbra nyílik: ekkor egyenlete: $x = (y - v)^2 + u$ alakú. Felhasználva, hogy a $(-6; 4)$ és a $(9; 1)$ pontok rajta vannak a parabolán, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -6 &= (y-4)^2 + u \\ 9 &= (y-1)^2 + u \end{aligned}\right\}$$

Kivonva az alsó egyenletből a felsőt, majd felbontva a zárójeleket:

$$\begin{aligned} 15 &= y^2 - 2y + 1 - y^2 + 8y - 16 \\ 30 &= 6y \\ 5 &= y \end{aligned}$$

Például az első egyenletbe visszahelyettesítve: $-6 = (5-4)^2 + u$, amiből $u = -7$. A parabola egyenlete: $\underline{\underline{x = (y-5)^2 - 7}}$ (az 1.29. ábrán kék színnel ábrázolva).

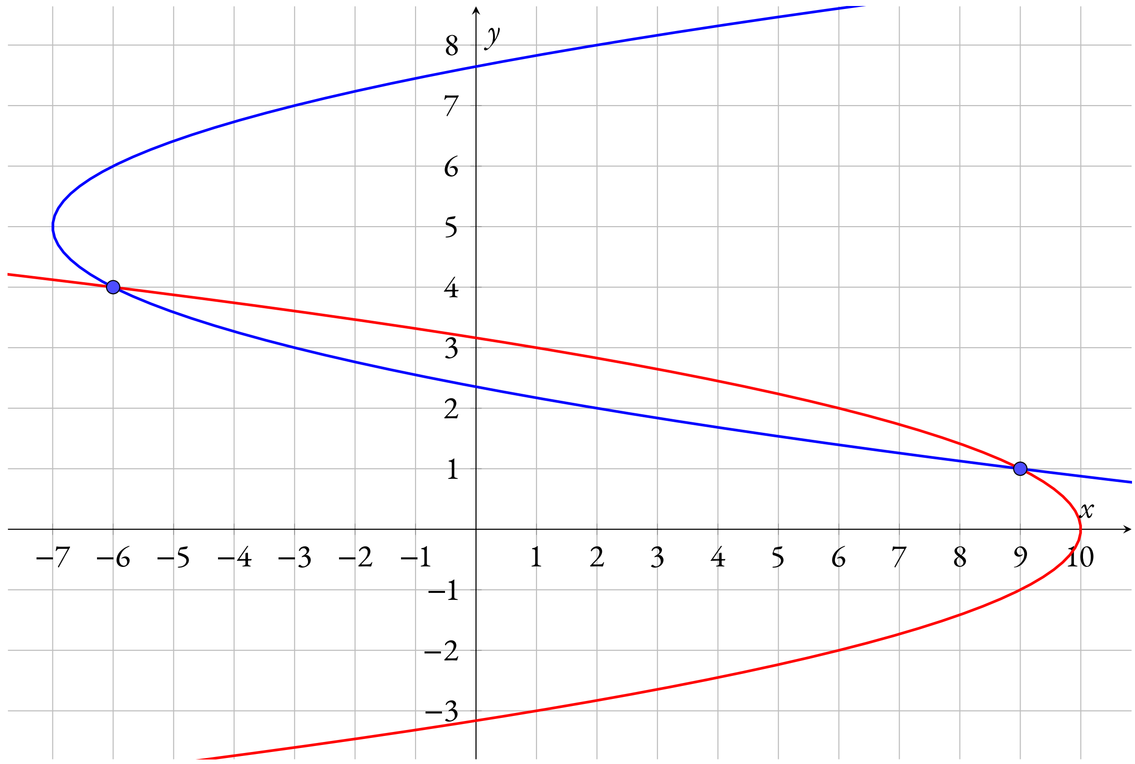
II. eset: A parabola balra nyílik: ekkor egyenlete: $x = -(y - v)^2 + u$ alakú. Felhasználva, hogy a $(-6; 4)$ és a $(9; 1)$ pontok rajta vannak a parabolán, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -6 &= -(y-4)^2 + u \\ 9 &= -(y-1)^2 + u \end{aligned}\right\}$$

Kivonva az alsó egyenletből a felsőt, majd felbontva a zárójeleket:

$$\begin{aligned} 15 &= -y^2 + 2y - 1 + y^2 - 8y + 16 \\ 0 &= -6y \\ 0 &= y \end{aligned}$$

Például az első egyenletbe visszahelyettesítve: $-6 = -(0-4)^2 + u$, amiből $u = 10$. A parabola egyenlete: $\underline{\underline{x = -y^2 + 10}}$ (az 1.29. ábrán piros színnel ábrázolva).



1.29. ábra

1.104. Feladat ([2] 4021. b)). Írjuk fel a parabola egyenletét, ha tengelypontja az x-tengelyen van, szimmetriatengelye párhuzamos az y-tengellyel, és áthalad a $(2; 3)$ és a $(-1; 12)$ pontokon.

1.105. Feladat ([2] 4023). Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja a $T(1; -1)$ pont, a parabola és az x-tengely egyik közös pontjának x-koordinátája 2. Számítsuk ki a, b, c értékét.

1.106. Feladat ([2] 4026. a)). Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a következő pontokon és a tengelye párhuzamos az y-tengellyel: $(-2; 3)$, $(4; 0)$, $(8; 8)$.

1.3.2. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete

1.107. Feladat ([2] 4060). Adott az $y = x^2 + 2mx + m(m-1)$ parabola $(m \in \mathbb{R})$ és az $y = x - \frac{1}{4}$ egyenletű egyenes. Hány közös pontja van a parabolának és az egyenesnek?

1.108. Feladat ([2] 4071). Írjuk fel az $y = \frac{1}{20}x^2$ egyenletű parabola olyan húregyenesének egyenletét, amely áthalad az $(5; 2)$ ponton és ez a pont a húrt felezi.

1.3.3. Parabola érintője

Motiváció. A kör érintőjéhez hasonló módon szeretnénk parabola érintőjét is definiálni. A körnél szokásos definíció másolása viszont itt gondot okoz: kör érintője olyan egyenes, melynek a körrel egyetlen közös pontja van. Ha a parabola érintőjét ugyanígy definiálnánk, azzal nem kapnánk egyértelmű érintőt: például a parabola tengelye, illetve a tengelypontjában a vezéregyenessel húzott párhuzamos egyenes is teljesíti azt a tulajdonságot, hogy egyetlen közös pontja van a parabolával (tudniillik a tengelypont). Hasonlóan kapjuk, hogy a parabola bármely pontját is tekintjük, a tengelyével párhuzamos mindig egyetlen közös ponttal rendelkezik a parabolával. Ezt mégsem szeretnénk érintőnek nevezni, mert például átmetszi a parabola grafikonját, illetve nem teljesíti azon szemléletbeli elvárásunkat sem, hogy a parabola érintője *hozzásimul* a parabolához. Ezt a lehetőséget tehát szeretnénk kizárni. Később a parabola érintőjét precízebben is definiáljuk. Most állapodjunk meg a következőben:

1.109. Definíció. A parabola *érintője* egy olyan egyenes, melynek a parabolával egyetlen közös pontja van, és nem párhuzamos a parabola tengelyével.

1.110. Feladat. [[2] 4095] Írjuk fel az $y = x^2 - 2x + 3$ egyenletű parabola 4 abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét!

Megoldás. A szóban forgó pont y-koordinátája $y = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$, azaz feladatunk a $P(4; 11)$ pontbeli érintő egyenletének felírása. A parabola tengelye párhuzamos az y-tengellyel, így a keresett érintő nem párhuzamos az y-tengellyel. Ebből következik, hogy van meredeksége, és mivel a $P(4; 11)$ pont rajta van, ezért iránytényezős egyenlete: $e : y - 11 = m\,(x - 4)$, azaz $\underline{e : y = mx - 4m + 11}$. A szóban forgó egyenes pontosan akkor érintője a parabolának, ha az alábbi egyenletrendszernek egyetlen megoldása van:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 3 \\ y &= mx - 4m + 11 \end{aligned}\right\}$$

Ebből a következő egyenletet kapjuk:

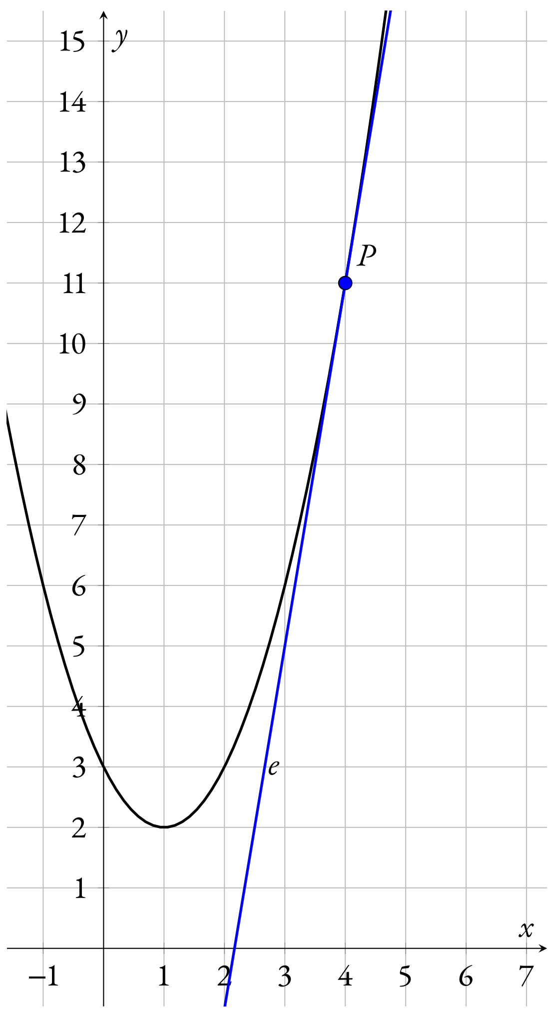
$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &= mx - 4m + 11 \\ x^2 + (-2 - m)x + 4m - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Ez egy másodfokú egyenlet. Pontosan akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned} (-2 - m)^2 - 4 \cdot (4m - 8) &= 0 \\ 4 + 4m + m^2 - 16m + 32 &= 0 \\ m^2 - 12m + 36 &= 0 \\ (m - 6)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ebből $m = 6$ következik. Az érintő egyenlete tehát: $\underline{\underline{e : y = 6x - 13}}$. A megoldást az 1.30. ábrán ábrázoltuk.

1.111. Megjegyzés. Az 1.110. feladat megoldásában a kapott másodfokú egyenletnek egyetlen m értéke esetén volt pontosan egy megoldása. Ez azt sugallja, hogy a parabola adott pontbeli érintője egyértelmű, vagyis



1.30. ábra

csak egyetlen olyan egyenes van, amely adott pontban érinti a parabolát. Vizsgáljuk meg a kérdést általánosan! Tekintsünk egy

$$y = a\,(x-u)^2 + v$$

egyenletű parabolát, ahol $a \neq 0$. Ez az y-tengellyel párhuzamos tengelyű, $T(u;v)$ tengelypontú parabola (a előjelétől függően felfelé vagy lefelé nyíló). Legyen $P\left(x_0;y_0\right)$ a parabola tetszőleges pontja, ekkor

$$y_0 = a\,(x_0-u)^2 + v \tag{1.32}$$

teljesül. Írjuk fel a P-beli e érintő egyenletét! e iránytényezős egyenlete: $e\ :\ y-y_0\ =\ m\,(x-x_0)$, azaz $\underline{e : y = mx - mx_0 + y_0}$. e pontosan akkor lesz érintő, ha a következő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van:

$$\left.\begin{aligned} y &= a\,(x-u)^2 + v \\ y &= mx - mx_0 + y_0 \end{aligned}\right\}$$

Ebből a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
a(x-u)^2+v &= mx-mx_0+y_0\\
ax^2-2aux+au^2+v &= mx-mx_0+y_0\\
ax^2+(-2au-m)x+au^2+v+mx_0-y_0 &= 0
\end{aligned}$$

Mivel $a \neq 0$, ez másodfokú egyenlet, amelynek pontosan akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned}
(-2au-m)^2-4a\left(au^2+v+mx_0-y_0\right) &= 0\\
4a^2u^2+4aum+m^2-4a^2u^2-4av-4amx_0+4ay_0 &= 0\\
m^2-4a(x_0-u)m+4a\left(y_0-v\right) &= 0
\end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy az (1.32) egyenlet szerint $y_0-v=a(x_0-u)^2$:

$$\begin{aligned}
m^2-4a(x_0-u)m+4a^2(x_0-u)^2 &= 0\\
(m-2a(x_0-u))^2 &= 0
\end{aligned}$$

Általános esetben is elmondhatjuk tehát, hogy egyetlen esetben lesz a diszkrimináns 0, mégpedig az érintő meredeksége:

$$m=2a(x_0-u).$$

Behelyettesítve e egyenletébe kapjuk, hogy a parabola keresett érintőjének egyenlete:

$$y-y_0=2a(x_0-u)(x-x_0).$$

Alakítsuk az egyenletet, felhasználva közben az (1.32) összefüggést is:

$$\begin{aligned}
y+y_0-2y_0 &= 2a(x_0-u)(x-x_0)\\
y+y_0 &= 2a(x_0-u)(x-x_0)+2y_0\\
y+y_0 &= 2a(x_0-u)(x-x_0)+2a(x_0-u)^2+2v\\
y+y_0 &= 2a(x_0-u)(x-x_0+x_0-u)+2v\\
y+y_0 &= 2a(x_0-u)(x-u)+2v\\
\frac{y+y_0}{2} &= a(x_0-u)(x-u)+v.
\end{aligned}$$

A kapott egyenlet nevezetes, és könnyen megjegyezhető: a parabola egyenletében a jobb oldali második hatvány *felébe* az érintési pont x_0 koordinátáját írjuk, a bal oldalon pedig y változó *felébe* az érintési pont y_0 koordinátáját írjuk. Az eljárást itt is (akárcsak a körnél) *felébehelyettesítésnek* nevezzük. Önmagában is megfogalmazzuk.

1.112. Állítás (felébehelyettesítés)**.** Az $y=a(x-u)^2+v$, $a \neq 0$ egyenletű parabola $P\left(x_0;y_0\right)$ pontbeli érintőjének egyenlete:

$$\frac{y+y_0}{2}=a(x_0-u)(x-u)+v.$$

Analóg állítást fogalmazhatunk meg az x-tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák esetén is.

1.113. Állítás (felébehelyettesítés)**.** Az $x = a\left(y - v\right)^2 + u$, $a \neq 0$ egyenletű parabola $P\left(x_0; y_0\right)$ pontbeli érintőjének egyenlete:

$$\frac{x + x_0}{2} = a\left(y_0 - v\right)\left(y - v\right) + u.$$

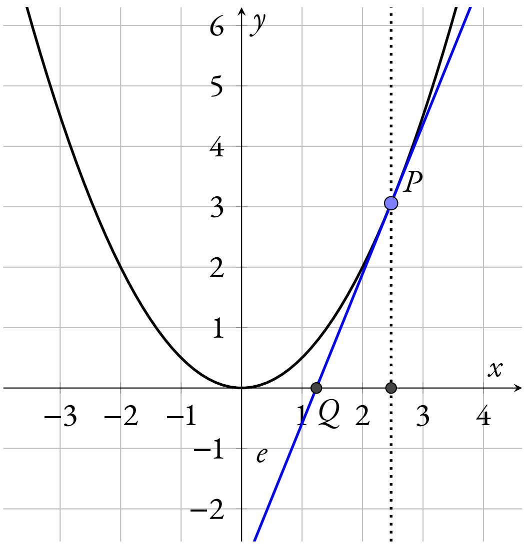
Az 1.110. feladatot is megoldhattuk volna felébehelyettesítéssel. Ott a parabola egyenlete: $y = (x-1)^2 + 2$, így a $P(4; 11)$ pontbeli érintőjének egyenlete: $\dfrac{y + 11}{2} = (4 - 1) \cdot (x - 1) + 2$, amiből rendezés után az $y = 6x - 13$ egyenlet adódik.

1.114. Megjegyzés. A kör adott pontbeli érintője is felírható a megfelelő felébehelyettesítéssel (1.77. állítás). Az analógia gyönyörű, a háttérben pedig általánosabb elmélet bújik meg.

Nézzünk néhány további szép tulajdonságot adott pontbeli érintőre vonatkozóan. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a parabola tengelypontja az origó, és felfelé nyílik. Ekkor egyenlete: $y = ax^2$ alakú, ahol $a > 0$. Mivel tetszőleges parabola felvehető így a koordinátarendszerben, a következő példák általános, parabolákra vonatkozó geometriai állításokat adnak meg.

1.115. Példa. Határozzuk meg az $y = ax^2$, $a > 0$ parabola $P\left(x_0; y_0\right)$ pontbeli érintőjének x-tengellyel való metszéspontját! Mit veszünk észre?

Megoldás. Tekintsük az 1.31. ábra jelöléseit.



1.31. ábra

A fentiek szerint a parabola érintőjének egyenlete

$$e: \frac{y + y_0}{2} = a x_0 x.$$

Ennek x-tengellyel való Q metszéspontjának x-koordinátáját megkapjuk az $y = 0$ helyettesítéssel:

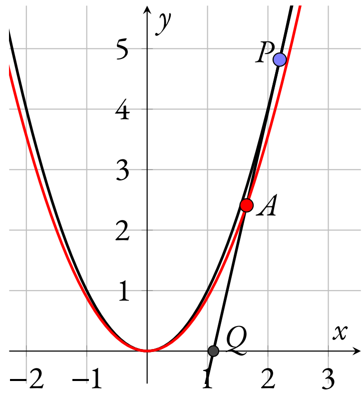
$$\frac{y_0}{2} = a x_0 x. \tag{1.33}$$

Ha most $x_0 = 0$, vagyis a $(0; 0)$-beli érintőről beszélünk, melynek egyenlete $y = 0$. Ez éppen az x-tengely, minden pontja metszéspont az x-tengellyel, de nem ez az érdekes eset.

Ha $x_0 \neq 0$, akkor az (1.33) összefüggésből kapjuk, hogy $x = \frac{y_0}{2ax_0}$. Mivel $P\left(x_0; y_0\right)$ a parabola pontja, ezért $x = \frac{ax_0^2}{2ax_0} = \frac{x_0}{2}$. A $P\left(x_0; y_0\right)$ pontbeli érintő tehát az x-tengelyt a $\underline{\underline{Q\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)}}$ pontban metszi. Ennek abszcisszája éppen a P abszcisszájának fele.

1.116. Feladat ([2] 4103). Az $y = x^2$ egyenletű parabola tetszőleges P pontjában a parabola érintője messe az x-tengelyt a Q pontban. Mi a $\overline{PQ}$ érintőszakaszok felezőpontjainak mértani helye?

Megoldás. Az 1.115. példa alapján dolgozunk. Tekintsük az 1.32. ábra jelöléseit!



1.32. ábra

Legyen a parabola egy pontja $P(x_0; x_0^2)$, ekkor az érintő az x-tengelyt a $Q\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ pontban metszi. A $\overline{PQ}$ szakasz felezőpontja:

$$A\left(\frac{x_0 + \frac{x_0}{2}}{2}; \frac{x_0^2 + 0}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}x_0; \frac{1}{2}x_0^2\right).$$

A felezőpont koordinátáira tehát $x = \frac{3}{4}x_0$, $y = \frac{1}{2}x_0^2$ teljesül. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van x és y között! Egyrészt $x_0 = \frac{4}{3}x$, másrészt ezt y-ba írva:

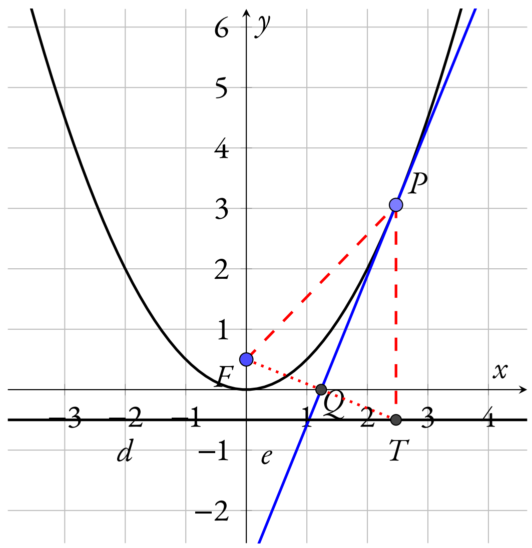
$$y = \frac{1}{2}x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9}x^2 = \frac{8}{9}x^2.$$

A felezőpontok tehát az $\underline{\underline{y = \frac{8}{9}x^2}}$ egyenletű görbét határozzák meg, ami egy parabola (az 1.34. ábrán piros színnel emeltük ki).

1.117. Példa. Legyen az $y = ax^2$, $a > 0$ parabola valamely $P\left(x_0; y_0\right)$ pontbeli érintője e. Mutassuk meg, hogy a parabola fókuszpontjának e-re vonatkozó tükörképe a parabola vezéregyenesére esik!

Megoldás. A szóban forgó parabola paraméterére $\frac{1}{2p} = a$ teljesül, vagyis $p = \frac{1}{2a}$, amiből fókusza $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, vezéregyenesének egyenlete: $d : y = -\frac{1}{4a}$.

Legyen P merőleges vetülete d-re T az 1.33. ábrán látható módon.



1.33. ábra

Ekkor $T\left(x_0; -\frac{1}{4a}\right)$. Az FPT háromszög egyenlő szárú, mivel a parabola P pontja egyenlő távolságra van F-től és d-től. Elegendő megmutatnunk, hogy az alaphoz tartozó magasságvonala éppen a parabola P-beli érintője. Ehhez határozzuk meg a $\overline{FT}$ szakasz Q felezőpontját: $Q\left(\frac{0+x_0}{2}; \frac{\frac{1}{4a} - \frac{1}{4a}}{2}\right) = \left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$. A szóban forgó magasságvonal a PQ egyenes. Mivel két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, ez az 1.115. példa alapján éppen azt jelenti, hogy PQ egyenes a parabola P-beli e érintője. F-nek e-re vonatkozó tükörképe tehát rajta van a vezéregyenesen, sőt többet láttunk be: éppen az érintési pont vezéregyenesre vonatkozó merőleges vetületével esik egybe.

1.118. Feladat ([2] 4097)**.** Az y-tengellyel párhuzamos tengelyű és felfelé nyíló parabola átmegy a $P(5; 4)$ ponton és érinti az x-tengelyt. A P pontban a parabolához húzható érintő merőleges a $\mathbf{v}(4; -1)$ vektorra. Írjuk fel a parabola egyenletét.

Megoldás. A parabola egyenlete $y = a(x-u)^2 + v$ alakú, ahol $a > 0$. Mivel érinti az x-tengelyt, ezért tengelypontja az x-tengelyen van, azaz $v = 0$. Eszerint a parabola egyenlete egyszerűbb: $y = a(x-u)^2$ alakú.

Mivel $P(5; 4)$ rajta van a parabolán, ezért

$$4 = a(5-u)^2. \tag{1.34}$$

Másrészt fel tudjuk írni a parabola P-beli e érintőjének egyenletét. A feltétel szerint $\mathbf{v}(4; -1)$ az érintő egy normálvektora, másrészt $P(5; 4) \in e$, azaz e egyenlete: $e : 4x - y = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 4$, vagyis $\underline{e : 4x - y = 16}$. Mivel

e érinti a parabolát, ezért a következő egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van:

$$\left.\begin{aligned} y &= a\,(x-u)^2 \\ 4x - y &= 16 \end{aligned}\right\}$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$\begin{aligned} 4x &= a\,(x-u)^2 + 16 \\ 0 &= ax^2 + (-2au - 4)\,x + au^2 + 16 \end{aligned}$$

Mivel e érintő, ezért ennek az egyenletnek pontosan egy megoldása van, azaz diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned} (-2au-4)^2 - 4a\left(au^2+16\right) &= 0 \\ 4a^2u^2 + 16au + 16 - 4a^2u^2 - 64a &= 0 \\ au - 4a + 1 &= 0 \\ 1 &= a\,(4-u) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Tekintsük az (1.34) és az (1.35) egyenletekből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 4 &= a\,(5-u)^2 \\ 1 &= a\,(4-u) \end{aligned}\right\}$$

$a \neq 0$ értelemszerűen, $5 \neq u$ és $4 \neq u$, különben nem realizálódna a parabola. Eszerint oszthatjuk egymással az egyenleteket:

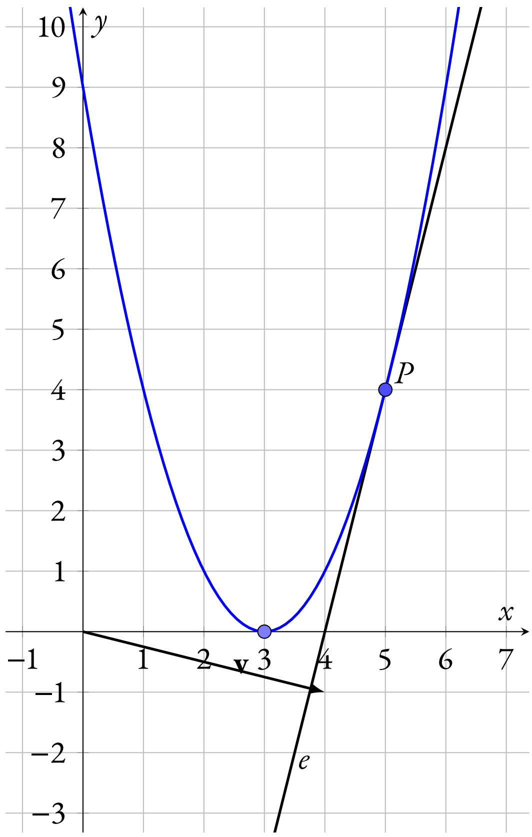
$$\begin{aligned} 4 &= \frac{(5-u)^2}{4-u} \\ 16 - 4u &= 25 - 10u + u^2 \\ 0 &= u^2 - 6u + 9 \\ 0 &= (u-3)^2 \end{aligned}$$

Eszerint $\underline{u = 3}$. Helyettesítsünk be az (1.35) egyenletbe: $1 = a\,(4-3)$, vagyis $\underline{a = 1}$. A keresett parabola egyenlete tehát $\underline{\underline{y = (x-3)^2}}$, melyet az 1.34. ábrán ábrázoltunk.

1.119. Feladat ([2] 4117)**.** Az $x^2 = 16y$ egyenletű parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenletű egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét.

Megoldás. Legyen a szóban forgó érintő e. Mivel e merőleges az $f : y = -\frac{1}{2}x$ egyenletű egyenesre, ezért meredeksége $m_e = -\frac{1}{m_f} = 2$. Ebből következik, hogy egyenlete $\underline{e : y = 2x + b}$ alakú. Nézzük az egyenes éa a parabola közös pontjait meghatározó egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{16}x^2 \\ y &= 2x + b \end{aligned}\right\}$$



1.34. ábra

A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{16}x^2 = 2x + b$$
$$0 = x^2 - 32x - 16b$$

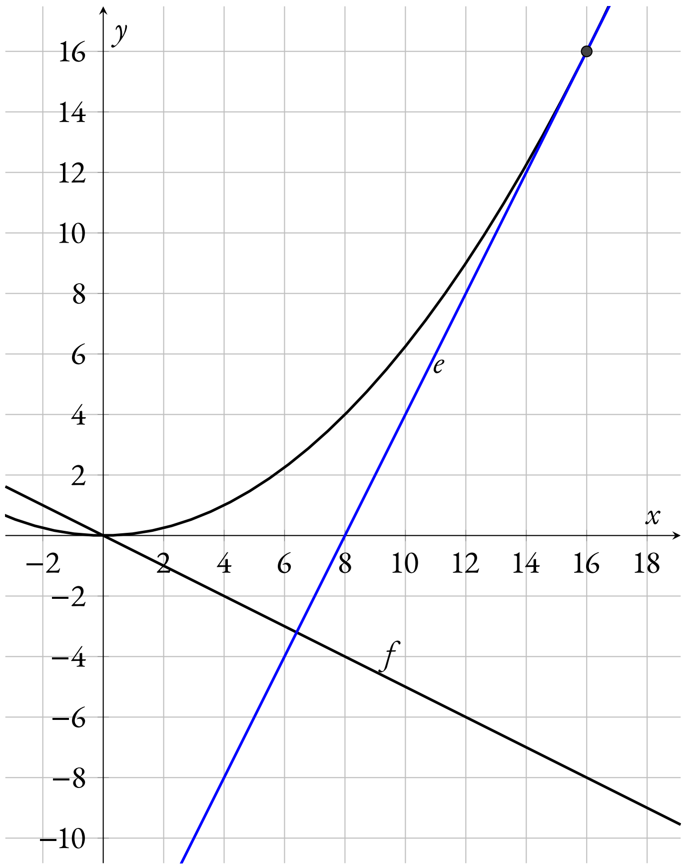
Mivel érintőről van szó, a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0:

$$1024 - 4 \cdot (-16b) = 0$$
$$1024 = -64b$$
$$b = -16$$

A keresett érintő egyenlete tehát $\underline{\underline{e : y = 2x - 16}}$, melyet az 1.35. ábrán ábrázoltunk.

1.120. Feladat ([2] 4130)**.** Határozzuk meg a $(9; 2)$ pontból az $y = \frac{1}{36}x^2$ egyenletű parabolához húzható érintők egyenletét.

Megoldás. A parabola tengelye párhuzamos az y-tengellyel, így az érintők biztosan nem párhuzamosak az y-tengellyel, vagyis van meredekségük. Emiatt a keresett érintő egyenlete $e : y - 2 = m(x - 9)$ alakú, azaz



1.35. ábra

$e : y = mx - 9m + 2$. Tekintsük az e és a parabola egyenletéből álló egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{36}x^2 \\ y &= mx - 9m + 2 \end{aligned}\right\}$$

Ebből a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{36}x^2 &= mx - 9m + 2 \\ x^2 - 36mx + 324m - 72 &= 0 \end{aligned}$$

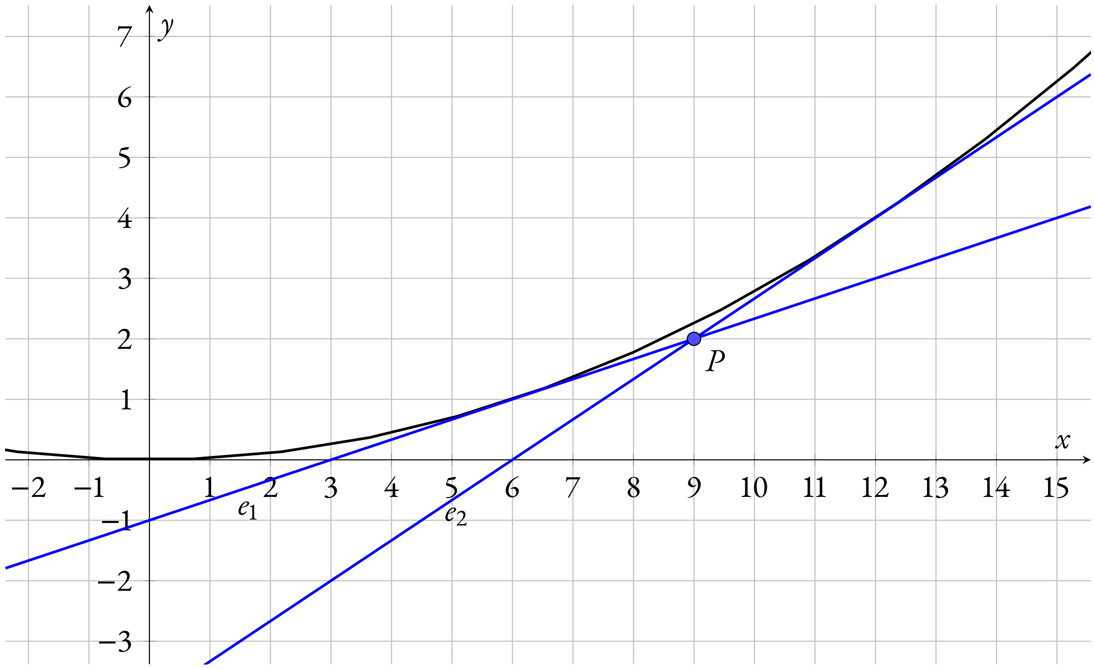
Mivel e érintő, ezért ennek az egyenletnek egyetlen megoldása van, ami pontosan akkor teljesül, ha diszkriminánsa 0:

$$\begin{aligned} 1296m^2 - 4\left(324m - 72\right) &= 0 \\ 1296m^2 - 1296m + 288 &= 0 \\ 9m^2 - 9m + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldásai $m_1 = \frac{1}{3}$, $m_2 = \frac{2}{3}$. Két megoldást kaptunk tehát:

$$\underline{\underline{e_1 : y - 2 = \frac{1}{3}(x - 9)}}, \quad \underline{\underline{e_1 : y - 2 = \frac{2}{3}(x - 9)}}.$$

A kapott egyeneseket az 1.36. ábrán ábrázoltuk.



1.36. ábra

Tárgymutató

T

V

Irodalom

[1] Mahler Attila és Orosz Gyula. *Gyűjtemény a matematika emelt szintű oktatásához 11-12.* Oktatási Hivatal, 2022.

[2] Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Iványiné Harró Ágota, Morvai Éva és Reiman István. *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.* Oktatási Hivatal, 2022.