Markó Zoltán

Sorozatok

Jegyzet (kézirat)

2024. július 3.

Exercitatio et mathematica

ЯMK

Tartalomjegyzék

1.

Sorozatok

Kisiskolás korunk óta találkozunk a sorozatokkal, vagyis számok egymást követő sorozatával. Közismert feladat, hogy folytassuk a 2, 4, 6, 8, stb. vagy éppen a 2, 3, 5, 7, stb. kezdőelemekkel rendelkező sorozatot. Matematikai szempontból egy olyan számsorozatot tekintünk jól definiáltnak, ahol egyértelműen megmondható, mi a sorozat n-edik tagja – eszerint az előző feladatokban felsorolást nem tekintjük sorozatnak, hiszen *akárhogyan* folytathatóak lennének. Először tehát a sorozat precíz fogalmát adjuk meg, majd a sorozatok tulajdonságaival foglalkozunk.

1.1. A sorozat fogalma, explicit és rekurzív alak

Motiváció. Ha a sorozat n-edik tagja a_n, akkor persze a_n függ n-től. Ez a gondolat vezet el odáig, hogy a sorozatokat, mint a természetes számokon értelmezett függvényeket értelmezzük, tudniillik az $n \mapsto a_n$ hozzárendelés megmondja, hogy mi a sorozat n-edik tagja.

1.1. Definíció. *Számsorozat* vagy egyszerűen csak *sorozat* alatt a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvényt értünk.

1.2. Példa. Az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = n^2 - n + 1$ függvény tehát sorozat: $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 3$, $f(3) = 7$, stb. Ez azt jelenti, hogy a sorozat nulladik tagja 1, első tagja 1, második tagja 3, harmadik tagja 7, stb.

Jelölés. Az $f(n)$ kifejezés helyett sorozatok esetén az f_n jelöléssel élünk, sőt: hagyományosan a latin ábécé első betűit használjuk: a_n, b_n, stb. Az a_n kifejezést a sorozat *n-edik tagjának* vagy *általános tagjának* nevezzük. Ebben a témakörben, ha mást nem mondunk, n tipikusan természetes számot, illetve pozitív természetes számot jelent.

Jelölés. Magát az a_n általános taggal rendelkező sorozatot többféleképpen is szokás jelölni: $\{a_n\}$, (a_n), de akár csak szimplán a_n-t is írnak sokszor.

1.3. Megjegyzés. Akkor is sorozatról beszélünk, ha a függvény az $\mathbb{N}^+$ halmazon van értelmezve. Ez közelebb áll a hétköznapi értelmezéshez is: a sorozat első tagja a_1, második tagja a_2, stb, és nincs *nulladik tag*. Az sem okoz ugyanakkor zavart, ha a sorozat tagjairól csak bizonyos n értéktől kezdve beszélünk. Ez főként akkor hasznos, ha a sorozat valamely $n \in \mathbb{N}$ értékre nincs értelmezve: pl. az $a_n = \dfrac{2n+5}{n-3}$ sorozatot érdemes csak $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezni, hiszen $n = 3$-ban a_n nem értelmezhető. Ekkor a sorozat első néhány tagja: $a_4 = 13, a_5 = \dfrac{15}{2}, a_6 = \dfrac{17}{3}$, stb.

1.4. Példa. Az általános iskolások az alábbi feladatot kapták: *folytasd a következő sorozatot:* 1, 2, 3, 4, ... Erre a többség a következő választ adta: 4, 5, 6, 7, stb, ezzel az $a_n = n$ sorozatot definiálták. Izgalmasan Gondolkodó Oszkár viszont a következőképpen gondolkodott: a 4 úgy áll elő, mint $1 + 3$. A következő tagja a sorozatnak emiatt $2 + 4 = 6$, majd a következő tag $3 + 6 = 9$, stb, a negyediktől kezdve minden tag úgy keletkezik, hogy az előtte lévőhöz hozzáadjuk a hárommal előtte lévő tagot. Mindenkinek igaza van: egyfajta logika alapján mindkét sorozat megfelelő megoldás abban az értelemben, hogy az első négy tagjuk 1, 2, 3, 4.

Az 1.4. példában sorozatok kétféle tipikus megadását szemlélhetjük meg.

1.5. Definíció. Egy sorozat *explicit alakja* a sorozat n-edik tagjának képlettel történő megadása.

1.6. Definíció. Egy sorozat *rekurzív megadása* a következő: megadjuk a sorozat első k tagját, majd a $k+1$. tagtól kezdve minden tagot az előtte lévő k tag segítségével, adott szabály szerint határozzuk meg. Az ilyen megadást *k-adrendű rekurziónak* nevezzük.

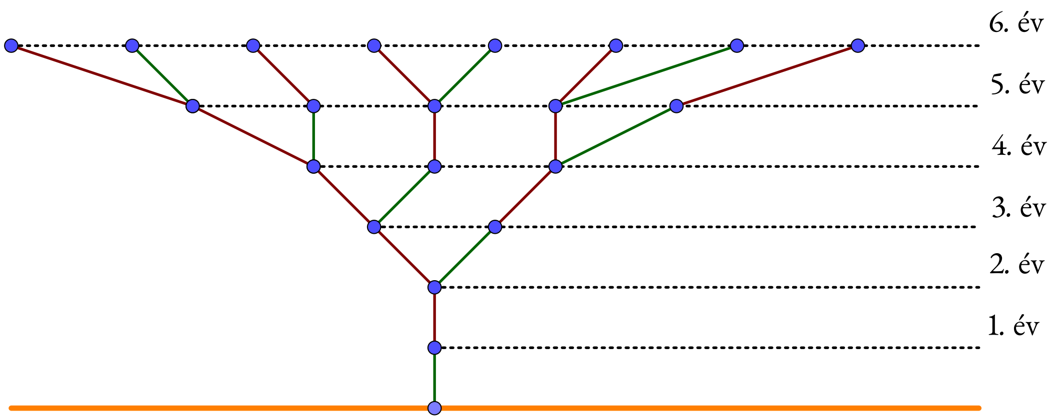
1.7. Példa. Az 1.4. példában az első megoldást az $a_n = n$ explicit alakban adott sorozat szolgáltatja. Izgalmasan Gondolkodó Oszkár megoldása az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_n = a_{n-3} + a_{n-1}$, $n \geq 4$ harmadrendű rekurzió.

1.8. Példa. További nevezetes sorozat a Fibonacci-sorozat, melynek rekurzív alakja: $f_1 = 1, f_2 = 1$, továbbá $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ ha $n \geq 3$. A Fibonacci-sorozat első néhány tagja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, stb. Magát a nevét Leonardo Pisano, népszerűbb nevén Fibonacci ($\sim 1170 - \sim 1250$) itáliai matematikus után kapta, aki *Liber Abaci* című művében ismertette meg az európai kultúrkörrel ezt a sorozatot. Egyébként ezen mű nyomán terjedt el Európában az arab számírás és a helyiértékes írásmód is.

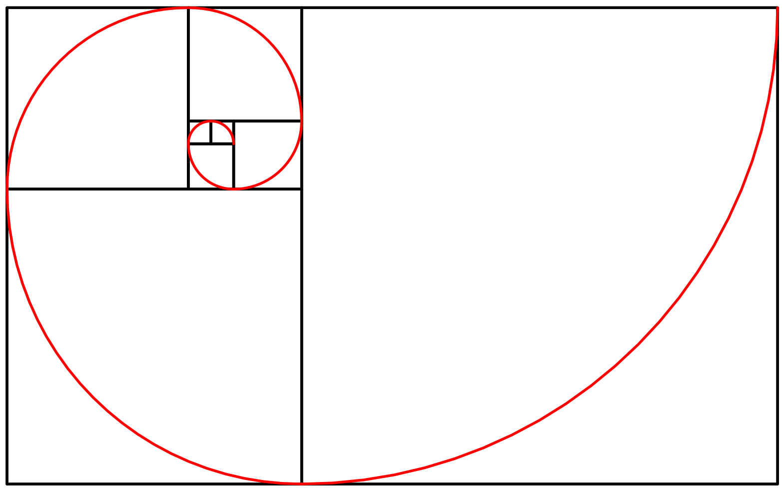
1.9. Megjegyzés. Fibonacci magát a nevezetes sorozatát nyúlpárok szaporodásának modellezésére használta. Ez persze ideális szaporulatot feltételez, de ettől függetlenül is a Fibonacci-sorozat, illetve egyéb rekurzív sorozatok megjelennek a természetben is. Tegyük fel például, hogy egy fa a következőképpen növekszik: az első évben hajt egy törzset (ez az első ág), majd a frissen kihajtott törzs pihen. A második év végén a törzs elágazik. Az új ág egy évet pihen, majd az is elágazik, a már korábban is létező törzs ismét elágazik. Ezt az eljárást folytatjuk: a már korábbi években is létező ágak (beleértve a törzset is) minden további évben elágaznak, és minden új ág egy évet pihen, majd tovább ágazik az 1.1. ábrán látható módon (az új ágakat zöld színnel, a már régebbieket barna színnel jelöltük).

Az első év végén 1, a második év végén 1, a harmadik év végén 2, majd 3, 5, 8, stb. ága van a fának. Ez éppen a Fibonacci-sorozat: az első két tagja 1, és utána minden tag az őt megelőző két tag összege. Valóban: egy évben annyi ág van, mint amennyi előtte évben volt, plusz még a két évvel azelőtti ágak mennyisége, hiszen azok is hajtanak már egy év pihenés után. A növekedés ilyen jellegű rekurzív *kódolása* gyakori a természetben, mivel nagyon egyszerű módja összetett struktúrák létrehozásának. A fának nem kell *tudnia*, hogy hány ágának kell lennie adott idő múlva, egyetlen információ elegendő: ha egy ág már valamennyi idős elmúlt, akkor hajtson további ágat/ágakat.

Másik tipikus példája a Fibonacci-sorozat ábrázolásának a Fibonacci-négyzetek sorozata, illetve a bele rajzolható Fibonacci-spirál (1.2. ábra): az egymás mellé rajzolt négyzetek oldalhosszúsága rendre 1, 1, 2, 3, 5, stb., míg beléjük negyedkörökből folytonos, megtörés nélküli vonal rajzolható. Ilyen alakú például a *csigáspolip* háza.



1.1. ábra



1.2. ábra

Motiváció. A rekurzív alak megadása sokszor egyszerűbb, ugyanakkor az explicit alak konkrét lehetőséget ad egy sorozat n-edik tagjának kiszámolására. Felmerül a kérdés, hogyan tudunk rekurzív alakban megadott sorozatokat explicit alakban felírni? Amennyiben kialakul egy sejtésünk az explicit alakra vonatkozólag, azt *teljes indukcióval* bizonyíthatjuk.

Emlék. A teljes indukciós bizonyítás során A_1, A_2, A_3, stb, n-től függő állítások mindegyikét bizonyítjuk a következő két lépésben:

1. Megmutatjuk, hogy A_1 igaz.
2. Feltesszük, hogy A_n igaz: ez az *indukciós feltétel*. Majd ezt felhasználva megmutatjuk, hogy ebben az esetben A_{n+1} is igaz.

Mivel A_1 igaz, és igazoltuk, hogy az állítás igazsága n-ről $n+1$-re öröklődik, az állítás minden n-re igaz lesz.

1.10. Példa ([1] 269/4)**.** Határozzuk meg az $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$, $a_1 = 1$ sorozat explicit alakját!

Megoldás. Nézzük meg az első néhány tagot, hátha észreveszünk valamit. $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+1^2} = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $a_4 = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$. Kialakul a sejtésünk, hogy a sorozat explicit alakja $a_n = \sqrt{n}$.

Ezt a sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. $n = 1$-re: $a_1 = 1 = \sqrt{1}$, az explicit alak $n = 1$-re rendben van.

2. Tegyük fel, hogy $a_n = \sqrt{n}$ teljesül az n-edik tagra. Ekkor az $n+1$-edik tagra:

$$a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rekurzió}}}{=} \sqrt{1+a_n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind. felt}}}{=} \sqrt{1+\left(\sqrt{n}\right)^2} = \sqrt{1+n} = \sqrt{n+1},$$

   vagyis az explicit képlet a_{n+1}-re is rendben van.

Az explicit képletet a teljes indukció elve alapján beláttuk. Nem győzzük hangsúlyozni, hogy az $a_n = \sqrt{n}$ mennyivel egyszerűbb alak, mint a rekurzív képlet. Segítségével például azonnal meg tudjuk mondani, hogy a sorozat századik tagja $a_{100} = \sqrt{100} = 10$, a rekurzív alakból ez 99 behelyettesítés után jön csak ki.

1.1.1. Számtani és mértani sorozatok

Motiváció. Nevezetes sorozatok az olyan számsorozatok, ahol az egymást követő tagok különbsége állandó, vagy éppen az egymást követő tagok hányadosa állandó. Gyakorlati jelentőségük miatt ezeket külön tárgyaljuk.

1.11. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *számtani sorozat*, ha bármely két egymás utáni tagjának különbsége állandó. Ezt az állandót a számtani sorozat *különbségének* vagy *differenciájának* nevezzük.

Jelölés. A számtani sorozat differenciájának jelölése: d.

Az $\{a_n\}$ sorozat tehát számtani, ha minden $n \geq 2$ esetén $a_n - a_{n-1} = d$, avagy $a_n = a_{n-1} + d$. Az első tag megadása mellett ez a számtani sorozat rekurzív alakja. Az explicit alakot az első tag és a differencia ismeretében megsejthetjük, majd a képletet teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

1.12. Tétel. Ha egy számtani sorozat első tagja a_1, differenciája d, akkor n-edik tagja: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

1. $n = 1$-re: a bizonyítandó képlet bal oldala a_1, jobb oldala: $= a_1 + (1-1)\cdot d = a_1$, vagyis $n = 1$-re a képlet helyes.

2. Tegyük fel, hogy a képlet helyes n-re, azaz $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$. Ekkor $n+1$-re:

$$a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rekurzió}}}{=} a_n + d \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind. felt.}}}{=} a_1 + (n-1)\cdot d = a_1 + nd - d + d = a_1 + ((n+1)-1)\cdot d,$$

   azaz a képlet $n+1$ esetén is helyes.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk. □

1.13. Megjegyzés. A számtani sorozatok rendelkeznek egy szép átlagoló tulajdonsággal: ha a sorozat n-edik tagja a_n, akkor az őt megelőző tag $a_{n-1} = a_n - d$, az őt követő tag $a_{n+1} = a_n + d$. Ekkor a_n szomszédainak átlaga:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n,$$

azaz *a számtani sorozat bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll, mint szomdédos tagjainak számtani közepe*. Ugyanígy belátható, hogy amennyiben $n - k \geq 1$, úgy

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n$$

is igaz bármely n-re. Innen ered a számtani sorozat elnevezés.

1.14. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *mértani sorozat*, ha bármely két egymás utáni tagjának hányadosa 0-tól különböző állandó. Ezt az állandót a mértani sorozat *hányadosának* vagy *kvóciensének* nevezzük.

Jelölés. A mértani sorozat kvóciensének jelölése: q.

Az $\{a_n\}$ sorozat tehát mértani, ha minden $n \geq 2$ esetén $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$, avagy $a_n = a_{n-1} \cdot q$. Az első tag megadása mellett ez a mértani sorozat rekurzív alakja. Az explicit alakot az első tag és a kvóciens ismeretében megsejthetjük, majd a képletet teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

1.15. Tétel. Ha egy mértani sorozat első tagja a_1, kvóciense q, akkor n-edik tagja: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

1. $n = 1$-re: a bizonyítandó képlet bal oldala a_1, jobb oldala: $= a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$, vagyis $n = 1$-re a képlet helyes.

2. Tegyük fel, hogy a képlet helyes n-re, azaz $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Ekkor $n + 1$-re:

$$a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rekurzió}}}{=} a_n \cdot q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind. felt.}}}{=} a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{(n+1)-1},$$

azaz a képlet $n + 1$ esetén is helyes.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk. □

1.16. Megjegyzés. A mértani sorozatok is rendelkeznek egy szép középérték tulajdonsággal: ha a sorozat n-edik tagja a_n, akkor az őt megelőző tag $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{q}$, az őt követő tag $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Ekkor a_n szomszédainak szorzata

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q = a_n^2.$$

Ha most $a_n > 0$ is teljesül minden n-re, akkor az

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = a_n$$

összefüggést kapjuk, azaz *a pozitív tagokból álló mértani sorozat bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll, mint szomszédos tagjainak mértani közepe*. Ugyanígy belátható, hogy amennyiben $n - k \geq 1$, úgy

$$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2$$

is igaz bármely n-re. Innen ered a mértani sorozat elnevezés.

1.17. Megjegyzés. Az explicit alakokból látszik, hogy a számtani sorozat egy természetes számokon értelmezett lineáris függvény, míg a mértani sorozat pozitív kvóciens esetén egy természetes számokon értelmezett exponenciális függvény. A mértani sorozat viszont bizonyos tekintetben általánosabb, mint egy exponenciális függvény, mert alapja, azaz q lehet negatív is. Ilyen mértani sorozat például az $a_n = (-1)^n$ sorozat, melynek első tagja $a_1 = -1$, kvóciense -1. Mivel itt most n természetes szám, ezt könnyen tudjuk értelmezni, miközben az $x \mapsto (-1)^x$ exponenciális függvényt nem értelmezzük tetszőleges valós x esetén.

1.2. Összegzések

1.2.1. Hatványösszegek

Emlék. Az $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összeg jelölésére röviden a szumma jelet használjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

A szumma jelölés definíciójából következnek a következő azonosságok:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i; \quad \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Emlék. Korábban igazoltuk, hogy

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Ezek nevezetes összegképletek, az igazolásukat teljes indukcióval végeztük el.

Most egy olyan általános módszert mutatunk, amely az $\sum_{i=1}^{n} i^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ összeg zárt alakjának felírását adja meg, amennyiben ismertek a $\sum_{i=1}^{n} i^l$ típusú összegek $1 \le l < k$ esetén. Igazoljuk például a köbszámok összegére vonatkozó képletet, amennyiben ismert az első hatványokra, illetve a második hatványokra vonatkozó összegképlet.

Emlék. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $n \ge 1$ egész szám, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ez a *binomiális tétel*.

Fejtsük ki az $(i+1)^4$ hatványt a binomiális tétel segítségével.

$$(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1.$$

Összegezzük ezt az azonosságot $i = 1; 2; \ldots; n$-re! A szummára vonatkozó azonosságokat is figyelembe véve:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^4 = \sum_{i=1}^{n}\left(i^4+4i^3+6i^2+4i+1\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 + 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Indexeljük át a bal oldali szummát: $\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)^4 = \sum\limits_{i=2}^{n} i^4$. Ezután kivonunk az egyenlet mindkét oldalából $\sum_{i=1}^{n} i^4$-t: ekkor a bal oldalon majdnem az összes tag kiesik (*teleszkópos összeg*):

$$\sum_{i=2}^{n+1} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

Használjuk fel, hogy a második, illetve első hatványok összegére ismerjük a zárt alakot, továbbá hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$:

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Rendezzük az egyenletet a keresett kifejezésre, majd számolgassunk:

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)\left((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)\right)$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)\left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right)$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^2\left((n+1)^2 - 2n - 1\right)$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^2\left(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1\right)$$
$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^2 n^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.$$

Ezzel igazoltuk az elő n db pozitív szám köbének összegére vonatkozó képletet. Ugyanez az eljárás működik magasabb egész kitevőkre is: a negyedik hatványok összegéhez például az $(1+i)^5$ kifejezést kell a binomiális tétel segítségével kibontani, majd szummázni 1-től n-ig, és használni a kisebb hatványösszegekre vonatkozó képleteket.

1.18. Feladat ([2] 1048)**.** Határozzuk meg az alábbi hatványösszegeket.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$;

b) $7^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + 17^2$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$;

d) $5^3 + 6^3 + 7^3 + \ldots + 13^3$.

Megoldás. a) Tudva, hogy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, a kérdéses összeg:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = \underline{\underline{385}}.$$

b) Ugyanígy:

$$7^2 + 8^2 + \ldots + 17^2 = \sum_{i=1}^{17} i^2 - \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \underline{\underline{1694}}.$$

c) Tudva, hogy $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, a kérdéses összeg:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 = \sum_{i=1}^{10} i^3 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = \underline{\underline{3\,025}}.$$

d) Ugyanígy:

$$5^3 + 6^3 + \ldots + 13^3 = \sum_{i=1}^{13} i^3 - \sum_{i=1}^{4} i^3 = \left(\frac{13 \cdot 14}{2}\right)^2 - \left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right)^2 = \underline{\underline{8\,181}}.$$

1.19. Feladat ([2] 1056. b))**.** Határozzuk meg az alábbi összeget ($n \in \mathbb{N}^+$):

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + n\,(n+2)\,.$$

Megoldás. A szummázásra vonatkozó összefüggéseket használva:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \ldots + n(n+2) = \sum_{i=1}^{n} i(i+2) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + 2i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \underline{\underline{\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}}}.$$

1.20. Feladat ([2] 1057. a))**.** Határozzuk meg az alábbi összeget ($n \in \mathbb{N}^+$):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n\,(n+1)\,(n+2)\,.$$

Megoldás. A szummázásra vonatkozó összefüggéseket használva:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)=\sum_{i=1}^{n}\left(i^3+3i^2+2i\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} i^3+3\sum_{i=1}^{n} i^2+2\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}=$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)\left(n(n+1)+2(2n+1)+4\right)}{4}=$$
$$=\frac{n(n+1)\left(n^2+5n+6\right)}{4}=\underline{\underline{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}}.$$

1.2.2. A számtani sorozat és a mértani sorozat összegképletei

Motiváció. További összegzéseket végezhetünk a nevezetes sorozatok összegképleteinek meghatározásával. A számtani sorozat esetén az $1+2+\ldots+n$ összeg meghatározásának Gauss-féle módszerét általánosítjuk. A legenda szerint a kiss Gausstól és osztálytársaitól tanítója az $1+2+\ldots+100$ összeg meghatározását kérte, hogy lefoglalja őket. Gauss a következőt figyelte meg: $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, stb. Emiatt, ha a kérdéses összeg kétszeresét írjuk fel, az 50 darab 101-es tag összegeként írható fel. Mivel így a kérdéses összeget kétszer számoltuk, az első száz pozitív egész összege $1+2+3+\ldots+100=101\cdot 50=5\,050$. Ezen módszer – egy kis módosítással – tetszőleges számtani sorozat esetén alkalmazható.

1.21. Tétel. A számtani sorozat első n tagjának összege: $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Bizonyítás. Legyen a számtani sorozat differenciája d. Írjuk le a számtani sorozat első n tagjának összegét egyszer oda-, másszor visszafele.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1$$

Adjuk össze ezt a két egyenletet! Vegyük észre, hogy $a_2+a_{n-1}=a_1+d+a_n-d=a_1+a_n$, $a_3+a_{n-2}=a_1+2d+a_n-2d=a_1+a_n$, stb, bármely kettő *egymás alatti* tag összege a_1+a_n a számtani sorozat képzési szabályából kifolyólag. Ezáltal az egyenletek összeadásával kapjuk, hogy

$$2S_n=a_1+a_n+a_1+a_n+a_1+a_n+\ldots+a_1+a_n+a_1+a_n$$
$$2S_n=(a_1+a_n)\cdot n$$

2-vel osztva az egyenlet mindkét oldalát, a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk. □

1.22. Következmény. Számtani sorozat esetén $a_n=a_1+(n-1)\,d$. Az előző képletbe helyetesítve így a következő összefüggést kapjuk:

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)\,d}{2}\cdot n.$$

1.23. Példa. Egy színház nézőterének első sorában 10 szék van, minden további sorban 2-vel több szék, mint az előtte lévőben. Hányan férnek el összesen a nézőtéren, ha 13 széksor van?

Megoldás. Az egyes sorokban lévő székek száma számtani sorozatot alkot, ahol $a_1 = 10$, $d = 2$, $n = 13$. A székek száma összesen

$$S_{13} = \frac{2 \cdot 10 + 12 \cdot 2}{2} \cdot 13 = \underline{\underline{286}}.$$

1.24. Tétel. A mértani sorozat első n tagjának összege: $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$, ha pedig $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$.

Bizonyítás. Legyen a mértani sorozat kvóciense $q \neq 0$. Ekkor $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Írjuk fel ennek megfelelően az első n tag összegét:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet q-val, majd írjuk az S_n-t madó egyenlet sora alá:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \color{red}{a_1 q} + \color{blue}{a_1 q^2} + \ldots + a_1 q^{n-2} + \color{green}{a_1 q^{n-1}} \\ qS_n &= \color{red}{a_1 q} + \color{blue}{a_1 q^2} + a_1 q^3 + \ldots + \color{green}{a_1 q^{n-1}} + a_1 q^n \end{aligned}$$

Vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt: teleszkópos összeget kapunk a jobb oldalon.

$$\begin{aligned} qS_n - s_n &= a_1 q^n - a_1 \\ (q-1)\, S_n &= a_1 \left(q^n - 1\right) \end{aligned}$$

Ha most $q \neq 1$, akkor $q - 1 \neq 0$, oszthatunk vele, és a bizonyítandó tétel egyik részét kapjuk:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha $q = 1$, akkor nem oszthatunk $q - 1$-gyel, ekkor viszont a sorozat minden tagja egyenlő a_1-gyel, s így $S_n = n \cdot a_1$. □

1.2.3. Alkalmazások

Motiváció. A számtani és mértani sorozatok összegképletének ismerete további rekurziók explicit alakjának meghatározását teszi lehetővé a teljes indukciós megoldásokon túl.

1.25. Példa ([1] 273/1 nyomán)**.** Tekintsük az $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $n \geq 2$, $a_1 = 2$ rekurzív sorozatot! Adjuk meg a sorozat explicit alakját!

Megoldás. A sorozat első néhány tagja: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 17$. Ez alapján kialakulhat a sejtésünk, hogy $\underline{a_n = 2^{n-1} + 1}$. Ez teljes indukcióval igazolható is.

1. $n = 1$-re: a bizonyítandó képlet bal oldala $a_1 = 2$, a jobb oldala: $2^{1-1} + 1 = 1 + 1 = 2$, a képlet helyes.
2. Tegyük fel, hogy a képlet helyes n-re, azaz $a_n = 2^{n-1} + 1$. Ekkor $n + 1$-re:

$$a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rekurzió}}}{=} 2a_n - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ind. felt.}}}{=} 2 \cdot \left(2^{n-1} + 1\right) - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} + 2 - 1 = 2^n + 1 = 2^{(n+1)-1} + 1,$$

vagyis a képlet $n + 1$-re is helyes.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

Mit tehetünk, ha nem jön az ihlet, és nem jön a sejtés? Egy másik lehetséges megoldást szolgálat a *különbségsorozat módszere*. Tekintsük a $d_n := a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$ sorozatot. Ennek első eleme egyrészt $d_2 = a_2 - a_1 = 1$, másrészt

$$d_n = a_n - a_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rekurzió}}}{=} 2a_{n-1} - 1 - (2a_{n-2} - 1) = 2\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) = 2d_{n-1},$$

ha $n \geq 3$. Eszerint d_n *mértani sorozat*, melynek első eleme $d_2 = 1$, kvóciense 2. Az $\{a_n\}$ sorozat elemeit a különbségsorozat elemeivel a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d_2 \\
a_3 &= a_2 + d_3 = a_1 + d_2 + d_3 \\
a_4 &= a_3 + d_4 = a_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i.
\end{aligned}$$

A kapott szumma egy olyan mértani sorozat első $n-1$ elemének összege, melynek első eleme 1, kvóciense 2. Ennek megfelelően

$$a_n = 2 + 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} + 1,$$

amit korábban teljes indukcióval is igazoltunk. Előnye ennek a megoldásnak, hogy nem kell megsejtenünk az explicit alakot, míg a teljes indukció használatához ez elengedhetetlen!

1.26. Feladat ([1] 278/1)**.** A $\{b_n\}$ sorozat rekurzív alakja $b_n = b_{n-1} + 2n - 17$, ha $n \geq 2$ és $b_1 = 3$.

a) Határozzuk meg az explicit alak segítségével b_{20} értékét!

b) Mennyi a sorozat első 20 tagjának összege?

Megoldás. a) Ismét a különbségsorozat módszerével dolgozunk. $d_n = b_n - b_{n-1} = 2n - 17$, ha $n \neq 2$. Most nincs szükség d_n-re vonatkozó rekurzió felírására, mert ez egyszerűen felösszegezhető:

$$\begin{aligned}
\underline{b_n =} b_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i = 3 + \sum_{i=2}^{n} (2i - 17) = 3 + 2\sum_{i=2}^{n} i - \sum_{i=2}^{n} 17 = 3 + 2 \cdot \frac{2+n}{2}(n-1) - (n-1) \cdot 17 = \\
= 3 + (n-1)(2 + n - 17) = \underline{3 + (n-1)(n-15)}.
\end{aligned}$$

Eszerint $\underline{\underline{b_{20} =}} 3 + 19 \cdot 5 = \underline{\underline{98}}$.

b) A sorozat explicit alakját, illetve a nevezetes összegképleteket használva:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{S_{20} =}} \sum_{i=1}^{20} b_i = \sum_{i=1}^{20} (3 + (i-1)(i-15)) = \sum_{i=1}^{20} \left(i^2 - 13i + 15\right) = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 13\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 15 = \\
= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - 13 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} + 20 \cdot 15 = \underline{\underline{440}}.
\end{aligned}$$

1.27. Feladat ([1] 278/2). A $\{c_n\}$ sorozat rekurzív alakja $c_n = c_{n-1} + n^2 - 17n + 2$, ha $n \geq 2$ és $c_1 = 1$.

a) Határozzuk meg az explicit alak segítségével c_{20} értékét!

b) Mennyi a sorozat első 20 tagjának összege?

Megoldás. a) A különbségsorozat most $d_n = c_n - c_{n-1} = n^2 - 17n + 2$, ha $n \geq 2$. A sorozat n-edik tagja:

$$\underline{c_n} = c_1 + \sum_{i=2}^{n} d_i = 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(i^2 - 17i + 2\right) = 1 + \sum_{i=2}^{n} i^2 - 17 \sum_{i=2}^{n} i + \sum_{i=2}^{n} 2 =$$
$$= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - 17\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + 2\,(n-1) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 51n(n+1) + 102}{6} + 2(n-1) = \frac{n(n+1)(2n+1-51) + 102}{6} + 2(n-1) =$$
$$= \frac{2n(n+1)(n-25) + 102}{6} + 2(n-1) = \frac{n(n+1)(n-25) + 51 + 6n - 6}{3} =$$
$$= \frac{\left(n^2+n\right)(n-25) + 6n + 45}{3} = \underline{\frac{n^3 - 24n^2 - 19n + 45}{3}}.$$

Ennek megfelelően $\underline{\underline{c_{20}}} = \dfrac{20^3 - 24 \cdot 20^2 - 19 \cdot 20 + 45}{3} = \underline{\underline{-645}}.$

b) A sorozat explicit alakját, illetve a nevezetes összegképleteket használva:

$$\underline{\underline{S_{20}}} = \sum_{i=1}^{20} \frac{i^3 - 24i^2 - 19i + 45}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{20} i^3 - 8 \sum_{i=1}^{20} i^2 - \frac{19}{3}\sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 45 =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} - 8 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} - \frac{19}{3} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} + 20 \cdot 45 = \underline{\underline{-8,690}}.$$

1.28. Példa ([1] 282/4). a) Adjuk meg az $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 1$ rekurzív sorozat explicit alakját!

b) Írjuk fel a sorozat első n elemének összegét n függvényeként!

1.3. Lineáris rekurziók

Motiváció. A rekurzív sorozatok explicit alakjának meghatározása általában nehéz feladat. Speciális esetekben megsejthetjük az általános tagot, és ekkor ezt teljes indukcióval igazolhatjuk, de ez a gyakorlatban meglehetősen ritkán jön össze. Szintén speciális esetként meghatároztuk a számtani, illetve mértani sorozatok explicit alakját, illetve a különbségsorozat módszerével további rekurziókat oldottunk meg. Egy további általánosítási lehetőség, hogy bár a mértani sorozatnál általánosabb, de *még mindig igen speciális* rekurziókat próbálunk megoldani.

1.29. Definíció. Az $a_n = c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k}$ rekurziót, ahol $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_{n-k}$ adott valós konstansok, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ értéke pedig szintén adott, *k-adrendű lineáris rekurziónak nevezzük*.

1.30. Megjegyzés. Egészen pontosan *k-adrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris rekurzióról* beszélünk, de mi most maradjunk egyszerűen a lineáris rekurzió elnevezésnél. A *k-adrendű* kifejezés arra utal, hogy a sorozat első k tagja adott, a továbbiak közül pedig tetszőleges elem az őt megelőző k tag lineáris kombinációjaként áll elő. A lineáris kombináció miatt nevezzük a rekurziót *lineárisnak*.

1.31. Példa. $k = 1$ esetén a sorozat első tagja adott, és a második elemtől kezdve $a_n = c_{n-1}a_{n-1}$. Ez éppen a mértani sorozat esete: $c_{n-1} = q$ jelöléssel élve láttuk, hogy az általános tag: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1.32. Példa. $k = 2$-re speciális sorozat a Fibonacci-sorozat, hiszen ott $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ a rekurziós összefüggés, vagyis $c_{n-1} = 1$, $c_{n-2} = 1$, a sorozat első két tagja pedig $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Motiváció. A Fibonacci-sorozat explicit alakjának felírásán keresztül olyan módszert mutatunk, mely egészen általános módon más másodrendű lineáris rekurziók megoldása során is alkalmazható.

1.33. Példa. [[1] 283/6] Állítsuk elő a Fibonacci-sorozat explicit alakját!

Megoldás. A Fibonacci-sorozat rekurziója:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \tag{1.1}$$

ha $n \geq 3$, továbbá $f_1 = f_2 = 1$. Próbáljunk először pusztán olyan sorozatot találni, amely az (1.1) összefüggést teljesíti. Az elsőrendű lineáris rekurizóknál látottak miatt próbáljunk meg q^n alakú megoldást találni, ahol $q \neq 0$ adott valós szám. Ha van ilyen megoldás, akkor az teljesíti az (1.1) rekurziót:

$$\begin{aligned}
q^n &= q^{n-1} + q^{n-2} \\
q^n &= \frac{q^n}{q} + \frac{q^n}{q^2} \\
1 &= \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \\
q^2 &= q + 1 \\
q^2 - q - 1 &= 0
\end{aligned}$$

A kapott másodfokú egyenlet a rekurzió úgynevezett *karakterisztikus egyenlete*. Megoldásai:

$$q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Azt kaptuk, hogy az $a_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ és a $b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ sorozatok egyaránt megoldják az (1.1) rekurziót. Jelenleg egyetlen probléma van ezekkel: az első két tagja egyik sorozatnak sem 1. Ezen úgy segíthetünk, hogy igyekszünk ezekből kiindulva általánosabb megoldásokat keresni, ami praktikusan szabad paraméterek megjelenését jelenti a sorozatok explicit alakjában. Amennyiben ezzel célt érünk, a szabad paramétereket fogjuk úgy beállítani, hogy az első két tagra vonatkozó feltétel is teljesüljön.

Vegyük észre ugyanakkor a következőt: ha $\{a_n\}$ sorozat megoldja az (1.1) rekurziót, akkor a $\{Ca_n\}$ sorozat szintén megoldja a rekurziót: ezen sorozat minden elemét úgy kapjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat minden elemét megszorozzuk egy $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Valóban: mivel $\{a_n\}$ megoldja a rekurziót, ezért $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ teljesül. Ekkor viszont $Ca_n = Ca_{n-1} + Ca_{n-2}$ is igaz, vagyis $\{Ca_n\}$ is szintén megoldás.

Hasonlóképp: ha $\{a_n\}$, illetve $\{b_n\}$ sorozatok megoldják az (1.1) rekurziót, akkor az $\{a_n + b_n\}$ sorozat is megoldja: ezen sorozat minden elemét úgy kapjuk, hogy az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ ugyanolyan indexű tagjait összeadjuk. Valóban: mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ is megoldja a rekurziót, ezért

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Összeadva az egyenleteket:

$$a_n + b_n = (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}),$$

vagyis $\{a_n + b_n\}$ is megoldás.

Mindezekből következik, hogy az (1.1) rekurziót az

$$f_n = C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

sorozat is megoldja tetszőleges C, D valós konstansokkal. Ezután határozzuk meg C és D értékét úgy, hogy $f_1 = 1$ és $f_2 = 1$ teljesüljön! Ez a következő egyenletrendszer teljesülését jelenti:

$$\left.\begin{aligned} C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 &= 1 \\ C\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Elvégezve a második egyenletben a négyzetre emelést, majd 2-vel szorozva a következőt kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} C\left(1-\sqrt{5}\right) + D\left(1+\sqrt{5}\right) &= 2 \\ C\left(3-\sqrt{5}\right) + D\left(3+\sqrt{5}\right) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Kivonva a felső egyenletből az alsót:

$$2C + 2D = 0$$
$$D = -C$$

Írjuk be a D-re kapott értéket például az első egyenletbe:

$$C\left(1-\sqrt{5}\right) - C\left(1+\sqrt{5}\right) = 2$$
$$-2\sqrt{5}\cdot C = 2$$
$$C = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ebből $D = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Azt kaptuk tehát, hogy az

$$f_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

explicit alakkal rendelkező sorozat egyrészt teljesíti a Fibonacci-sorozat rekurzióját, másrészt első és második eleme 1. Ebből következik, hogy a kapott alak a Fibonacci-sorozat explicit alakja. Némivel irodalmibb változatban:

$$\underline{\underline{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}}.$$

1.34. Megjegyzés. Az 1.33. példa gondolatmenete általánosítható. Másodrendű lineáris rekurzió megoldását q^n alakú sorozat formájában keressük, amely a rekurzió karakterisztikus egyenletéhez vezet. Ez egy másodfokú egyenlet, melynek lehet 2, 1 vagy 0 valós gyöke. Amennyiben 2 valós gyöke van, úgy legyenek ezek q_1, q_2. A fentiekhez hasonlóan $Cq_1^n + Dq_2^n$ alakban keressük a rekurzió megoldását, a C és D konstansokat pedig a sorozat első két eleme által meghatározott lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.

Bonyolultabb esetet jelent, ha a karakterisztikus egyenletnek egy vagy nulla valós gyöke van. Előbbi esetben további ötlettel még kaphatunk egy másik megoldást, és ismét két sorozat lineáris kombinációjában, a szabad paraméterek meghatározásával a rekurzió megoldható. Amennyiben a karakterisztikus egyenletnek nincsenek valós gyökei, a megoldáshoz muszáj komplex számokat használni még úgy is, hogy a rekurzió megoldása végül valós számsorozat lesz.

Még általánosabban elmondható, hogy a k-adrendű (állandó együtthatós, homogén) lineáris rekurziók megoldása egy k-adfokú karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározására vezethető vissza.

1.35. Példa ([2] 1019). Adjuk meg az $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ sorozat explicit alakját!

Megoldás. Keressük a sorozat általános tagját q^n, $q \neq 0$ alakban! Ekkor a rekurzió:

$$\begin{aligned} q^{n+2} &= q^{n+1} + 6q^n \\ q^2 &= q + 6 \\ q^2 - q - 6 &= 0 \end{aligned}$$

A kapott karakterisztikus egyenlet megoldásai: $q_1 = -2$, $q_2 = 3$. Keressük ezután a sorozat explicit alakját $\underline{a_n = C \cdot (-2)^n + D \cdot 3^n}$ alakban! Az első két tag alapján

$$\left.\begin{aligned} C \cdot (-2)^0 + D \cdot 3^0 &= 0 \\ C \cdot (-2)^1 + D \cdot 3^1 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} C + D &= 0 \\ -2C + 3D &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletből $D = -C$, amit a második egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} -2C - 3C &= 1 \\ C &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ebből $D = \frac{1}{5}$. A sorozat explicit alakja tehát $\underline{\underline{a_n = -\frac{1}{5} \cdot (-2)^n + \frac{1}{5} \cdot 3^n}}$.

1.4. Sorozatok jellemzése

Motiváció. A sorozatok speciális függvények, így felmerülhet a kérdés, hogy a függvények tulajdonságai közül melyek azok, amiket sorozatok esetén is érdemes vizsgálni. A gyakorlati szempontból fontos tulajdonságok sorozatok esetén a *monotonitás* illetve a *korlátosság*.

Emlék. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény *monoton nő*/*monoton csökken*, ha minden $x_1; x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$/$f(x_1) \geq f(x_2)$. Ha ezen tulajdonságok valamelyike teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f *monoton*.

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény *szigorúan monoton nő*/*szigorúan monoton csökken*, ha minden $x_1; x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$/$f(x_1) > f(x_2)$. Ha ezen tulajdonságok valamelyike teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f *szigorúan monoton*.

A sorozatok monotonitására vonatkozó definíciók mindezek speciális esetei: a speciális értelmezési tartomány miatt lehetőségünk van a monotonitást egyszerűbben megfogalmazni, mint azt a függvények esetén tettük.

1.36. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton nő*, ha minden n-re $a_n \leq a_{n+1}$.
Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton csökken*, ha minden n-re $a_n \geq a_{n+1}$.
Ha ezen tulajdonságok valamelyike teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\{a_n\}$ *monoton*.

1.37. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *szigorúan monoton nő*, ha minden n-re $a_n < a_{n+1}$.
Az $\{a_n\}$ sorozat *szigorúan monoton csökken*, ha minden n-re $a_n > a_{n+1}$.
Ha ezen tulajdonságok valamelyike teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\{a_n\}$ *szigorúan monoton*.

1.38. Megjegyzés. A definíciókat a különbségsorozat segítségével is megfogalmazhatjuk. Legyen $d_n = a_n - a_{n-1}$, ha $n \geq 2$, az a_n sorozat különbségsorozata. Ekkor $\{a_n\}$ monoton nő/monoton csökken pontosan akkor, ha $d_{n+1} \geq 0$/$d_{n+1} \leq 0$, az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton nő/szigorúan monoton csökken pontosan akkor, ha $d_{n+1} > 0$/$d_{n+1} < 0$.

Emlék. Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény *felülről korlátos*/*alulról korlátos*, ha létezik $K \in \mathbb{R}$/$k \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq K$/$k \leq f(k)$.

Ha egy függvény alulról korlátos és felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *korlátos*.

Ha egy függvénynek van felső korlátja, akkor végtelen sok felső korlátja van. Amennyiben létezik, úgy a felső korlátok közül a legkisebbet *legkisebb felső korlátnak* vagy *szuprémumnak* nevezzük.

Ha egy függvénynek van alsó korlátja, akkor végtelen sok alsó korlátja van. Amennyiben létezik, úgy az alsó korlátok közül a legnagyobbat *legnagyobb alsó korlátnak* vagy *infimumnak* nevezzük.

Sorozatok korlátosságára vonatkozóan definícióink analóg változatai az általánosan függvényekre vonatkozó definícióknak.

1.39. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *felülről korlátos*, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden n-re $a_n \leq K$.
Az $\{a_n\}$ sorozat *alulról korlátos*, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden n-re $k \leq a_n$.
Az $\{a_n\}$ sorozat *korlátos*, ha alulról korlátos és felülről korlátos.

Amennyiben egy sorozat felülről korlátos, úgy végtelen sok felső korlátja van. Sorozatok esetében a *felső korlátok között mindig van legkisebb*. Ez a valós számok egy tulajdonsága, melyet szemléletből elfogadunk. Hasonlóképpen: ha egy sorozat alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van, és az *alsó korlátok között mindig van legnagyobb*.

1.40. Definíció. Amennyiben az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos, úgy a felső korlátok közül a legkisebbet *legkisebb felső korlátnak* vagy *szuprémumnak* nevezzük.
Amennyiben az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos, úgy az alsó korlátok közül a legnagyobbat *legnagyobb alsó korlátnak* vagy *infimumnak* nevezzük.

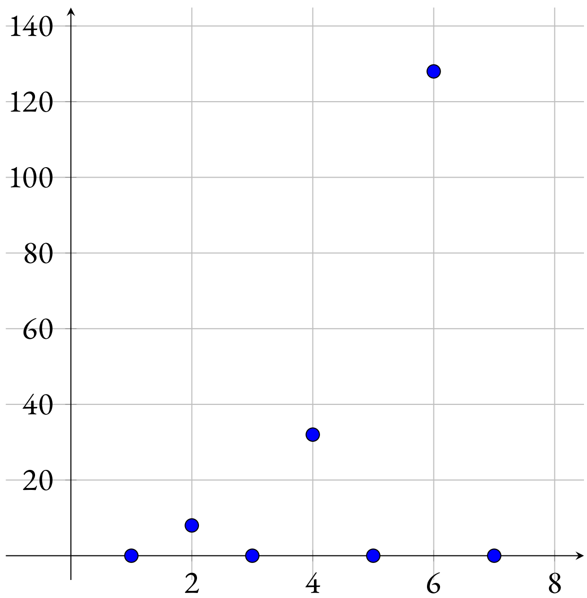
Jelölés. $\{a_n\}$ sorozat szuprémuma: $\sup a_n$, infimuma: $\inf a_n$.

1.41. Feladat ([1] 279/9. nyomán)**.** Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:
$\{a_n\}$, ahol $a_n = (-2)^n + 2^n$;
$\{b_n\}$, ahol $b_n = |n-23| - |n-10|$;
$\{c_n\}$, ahol $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.
Vizsgáljuk meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Korlátos sorozat esetén adjuk meg a sorozat infimumát, szuprémumát!

Megoldás. Az $\{a_n\}$ sorozatban a tagok az index paritása szerint eltérően viselkednek. Ha $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, akkor $a_n = a_{2k} = (-2)^{2k} + 2^{2k} = 2^{2k} + 2^{2k} = 2 \cdot 2^{2k} = 2^{2k+1} = 2^{n+1}$. Ha pedig $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, akkor $a_n = a_{2k+1} = (-2)^{2k+1} + 2^{2k+1} = -2^{2k+1} + 2^{2k+1} = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+; \\ 0, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}_0^+. \end{cases}$$

A sorozat első néhány tagját az 1.3. ábrán ábrázoltuk.



1.3. ábra

A sorozat $\underline{\underline{\text{alulról korlátos}}}$, hiszen minden n-re $a_n \geq 0$, így 0 egy alsó korlátja. Sőt: páratlan n-ekre $a_n = 0$, így $\underline{\underline{\inf a_n = 0}}$.

A sorozat felülről nem korlátos. Legyen ugyanis $K > 0$ tetszőleges valós szám. Oldjuk meg valamely $n = 2k$-ra az $a_n > K$ egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned} a_n &> K \\ a_{2k} &> K \\ 2^{2k+1} &> K \end{aligned}$$

Vegyük mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát! Mivel a 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ezért

$$\begin{aligned} 2k+1 &> \log_2 K \\ k &> \frac{\log_2 K - 1}{2} \end{aligned}$$

Ha tehát $k > \dfrac{\log_2 K - 1}{2}$ egész szám, akkor már $a_n = a_{2k} > K$. Mivel K tetszőleges pozitív szám volt, a_n felülről nem lehet korlátos: bármely korlát esetén van olyan eleme, mely ennél a korlátnál nagyobb.

Végül a sorozat nem monoton, ugyanis bármely $k \in \mathbb{Z}_0^+$ esetén $a_{2k+1} < a_{2k+2} > a_{2k+3}$, hiszen ezen relációlánc középső tagja 2-nek egész kitevőjű hatványa, szélső két tagja pedig 0.

Nézzük a $\{b_n\}$ sorozatot. Az abszolútérték definíciója szerint

$$|n-23| = \begin{cases} n-23, & \text{ha } n \geq 23; \\ -n+23, & \text{ha } n < 23; \end{cases} \qquad |n-10| = \begin{cases} n-10, & \text{ha } n \geq 10; \\ -n+10, & \text{ha } n < 10. \end{cases}$$

Ennek megfelelően

$$b_n = \begin{cases} -n+23-(-n+10), & \text{ha } 1 \leq n \leq 9; \\ -n+23-(n-10), & \text{ha } 10 \leq n \leq 22; \\ n-23-(n-10), & \text{ha } 23 \leq n, \end{cases}$$

azaz

$$b_n = \begin{cases} 13, & \text{ha } 1 \leq n \leq 9; \\ -2n+33, & \text{ha } 10 \leq n \leq 22; \\ -13, & \text{ha } 23 \leq n, \end{cases}$$

A sorozat első 26 tagját az 1.4. ábrán ábrázoltuk.

A sorozat alulról korlátos, hiszen minden n-re $b_n \geq -13$, így -13 egy alsó korlátja. Sőt: $n \geq 23$ esetén $a_n = -13$, így $\inf b_n = -13$. A sorozat felülről korlátos, hiszen minden n-re $b_n \leq 13$, így 13 egy felső korlátja. Sőt: $1 \leq n \leq 10$ esetén $b_n = 13$, így $\sup b_n = 13$. Mivel $\{b_n\}$ alulról korlátos és felülről korlátos, ezért korlátos.

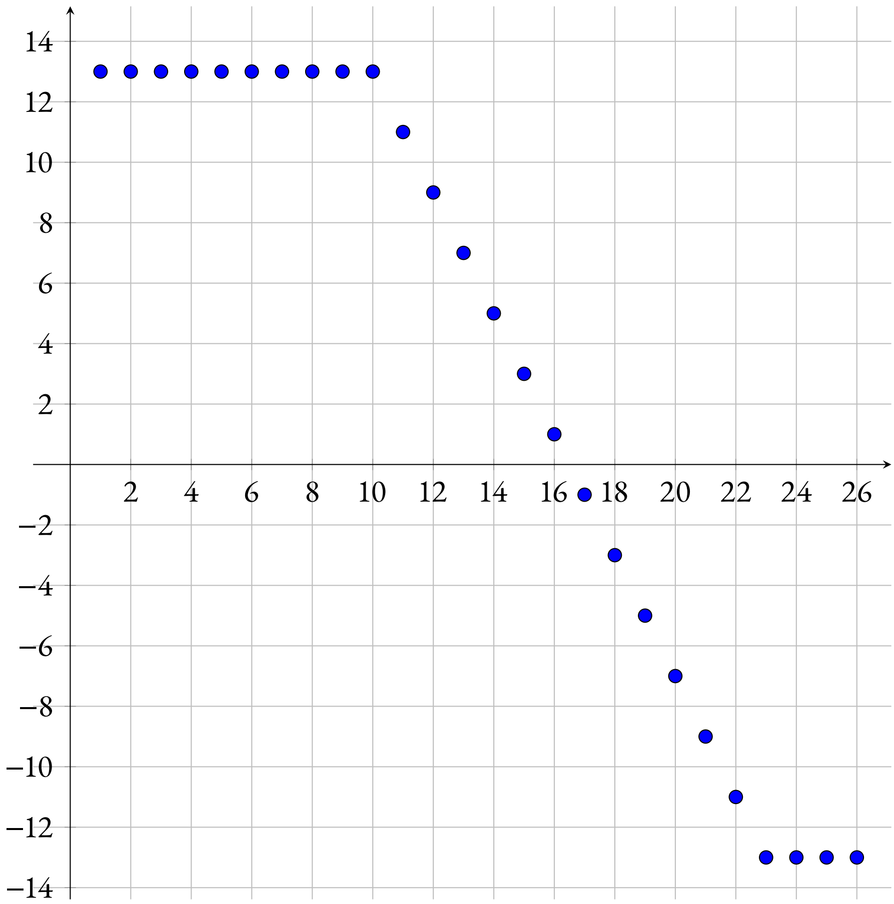
Mivel $b_{n+1} \leq b_n$ minden n-re, ezért a sorozat monoton csökken.

A $\{c_n\}$ sorozat esetén az általános tagot trigonometrikus azonosságokkal hozhatjuk egyszerűbb alakúra:

$$\begin{aligned} c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) = \\ = 1 + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n\right) = 2 + \sin(n\pi) = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Tehát $\{c_n\} = 1$ minden n-re, azaz a konstans 1 sorozatról van szó.

Ez a sorozat alulról korlátos és felülről korlátos, $\inf a_n = \sup a_n = 1$, tehát korlátos. Mivel konstans, ezért monoton nő és egyben monoton csökken.



1.4. ábra

1.5. Sorozatok határértéke

Motiváció. A továbbiakban vizsgálatunk fő tárgya, hogy *nagyon nagy n indexek esetén* hogyan viselkedik eg $\{a_n\}$ sorozat. Több tapasztalatunk is van már e téren: bizonyos sorozatok *tetszőleges pontossággal* megközelítenek egy bizonyos valós számot, de *soha nem érik el*. Ezt a tapasztalatot ragadjuk meg a határérték fogalmának precíz definíciójával. A most megalkotásra kerülő fogalom további matematikatanulmányaink szempontjából kulcsfontosságú, a felsőbb matematika alapvető fogalmai között szerepel.

1.42. Példa. [[1] 285/1. nyomán] Mely esetekben mondanánk, hogy az alábbi sorozatok „tartanak valamihez”, illetve hogy „van határértékük”?

a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots;$

b) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots;$

c) $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots;$

d) $0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \ldots;$

e) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots;$

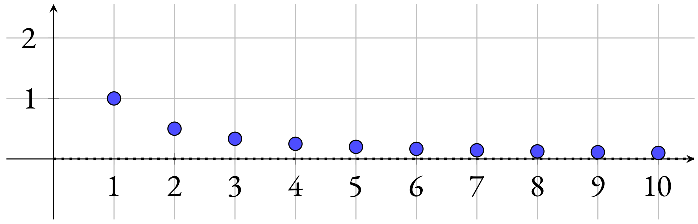
i) $2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ \ldots;$

j) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots;$

k) $0,\ 1, 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ \ldots.$

Megoldás. Ábrázoljuk a sorozatok tagjait a koordináta-rendszerben! A következőben a sorozatokat a feladat sorszáma által adott betűvel jelöljük.

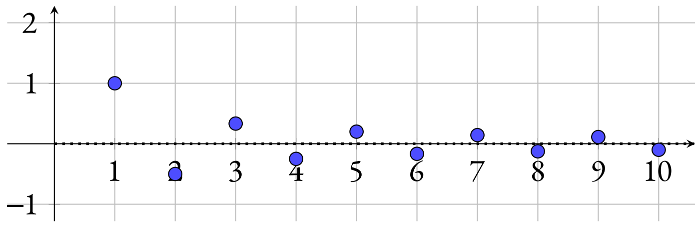
Az $\{a_n\}$ sorozat a következő: $a_n = \dfrac{1}{n}$. A sorozat első tíz tagját az 1.5. ábrán ábrázoltuk.



1.5. ábra

Az a benyomásunk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat tagjai *tetszőleges pontossággal megközelítik a* 0*-t*, azaz a sorozat a 0*-hoz tart*.

A $\{b_n\}$ sorozat a következő: $b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$. A sorozat első tíz tagját az 1.6. ábrán ábrázoltuk.



1.6. ábra

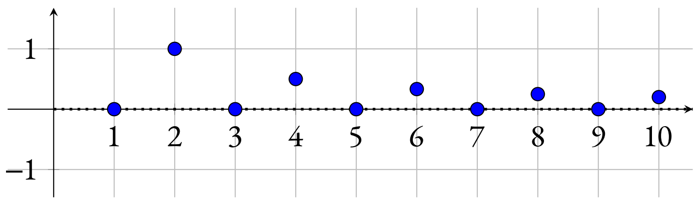
Az a benyomásunk, hogy a $\{b_n\}$ sorozat elemei, bár váltakozik az előjelük (az ilyen sorozatokat *alternálónak* nevezik), szintén *tetszőleges pontossággal megközelítik a* 0*-t*, azaz ez a sorozat is 0*-hoz tart*.

A $\{c_n\}$ sorozat a következő: $c_n = 0$. Nemcsak közelíti a nullát, de minden egyes tagja el is éri azt. Meglepő lenne mást mondani, így azt mondjuk, hogy ez a sorozat is 0*-hoz tart*.

A $\{d_n\}$ sorozat a következő:

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}_0^+; \\ \dfrac{1}{k}, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

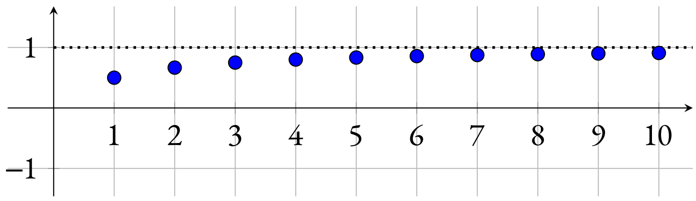
A sorozat első tíz tagját az 1.7. ábrán ábrázoltuk.



1.7. ábra

Szemléletünkből adódik, hogy ez a sorozat is 0*-hoz tart*.

Az $\{e_n\}$ sorozat a következő: $e_n = \dfrac{n}{n+1}$. A sorozat elsp tíz tagját az 1.8. ábrán ábrázoltuk.



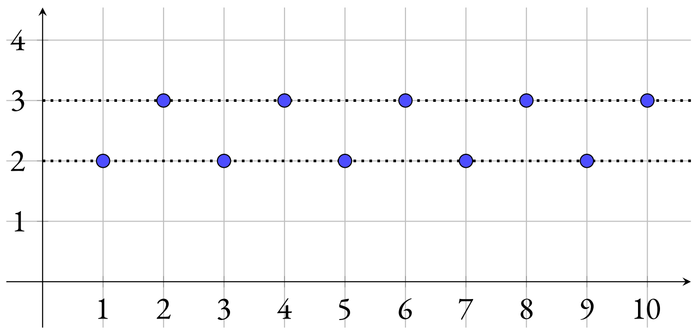
1.8. ábra

Az a benyomásunk, hogy az $\{e_n\}$ sorozat tagjai *tetszőleges pontossággal megközelítik az* 1*-et*, azaz a sorozat az 1*-hoz tart*.

Az $\{i_n\}$ sorozat a következő:

$$i_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}_0^+; \\ 3, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

A sorozat első tíz tagját az 1.9. ábrán ábrázoltuk.



1.9. ábra

Nem tudunk olyan számot megnevezni, amelyet a sorozat elemei tetszőleges pontossággal megközelítenek, mert bár a 2 és a 3 lehetséges jelöltek lehetnének, *nem mondhatjuk, hogy a sorozat például* 2*-be tart*, mert akármilyen nagy indexű n esetén tudunk olyan tagot mondani, amely nincs a 2-höz közel (a sorozat minden második tagja 3).

A $\{j_n\}$ sorozat a következő: $j_n = n$. A sorozat első 10 tagját az 1.10. ábrán ábrázoltuk.

Itt az az érzésünk, hogy amennyiben n nagy, úgy j_n is tetszőlegesen nagy értéket felvehet, a sorozat *nem tart véges számhoz*. Ha nagyon mondani akarunk valamit, azt mondhatjuk, hogy *a sorozat végtelenhez tart*.

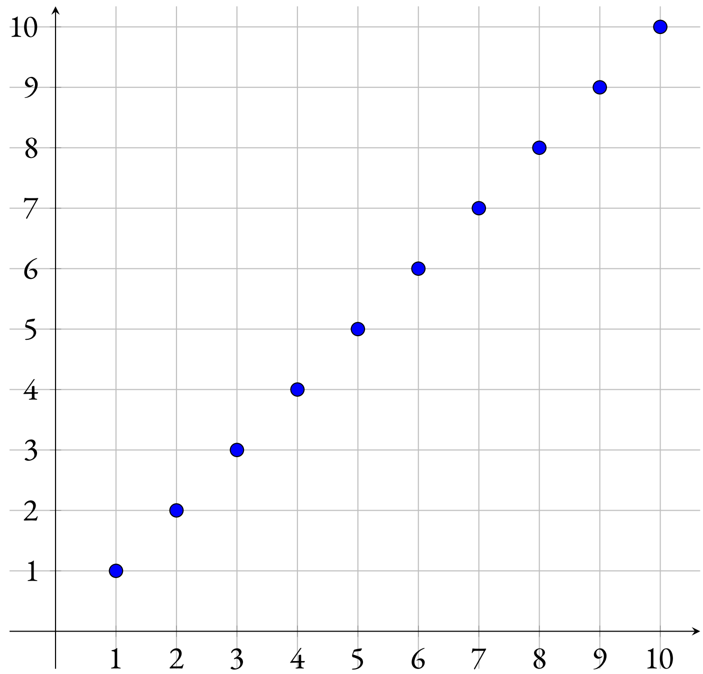
A $\{k_n\}$ sorozat a következő:

$$k_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}_0^+; \\ k, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

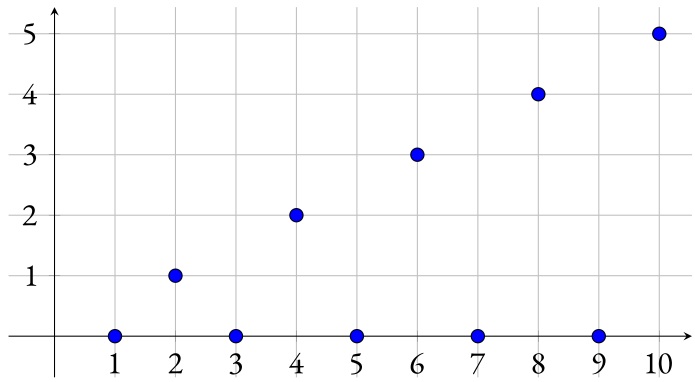
A sorozat első tíz tagját az 1.11. ábrán ábrázoltuk.

A páros indexek mentén a sorozatról ismét mondhatjuk, hogy végtelenbe tart, ugyanakkor a páratlan indexek mentén a sorozat elemei 0-k. Ezáltal a $\{k_n\}$ sorozat esetén is azt kell mondanonunk, hogy a sorozat *nem tart sehova*.

A fenti megfigyeléseinket a határérték definíciójával tehetjük precízzé. A benyomásunk a következő: az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az A szám, ha az $\{a_n\}$ sorozat elemei az A-t *tetszőleges pontossággal* megközelítik, azaz egy bizonyos elemtől kezdve a sorozat minden tagja már A-tól egy előre előírt eltéréshez képest kevésbé tér el. Mindezt a *környezet* definíciójával fogjuk megfogalmazni.



1.10. ábra



1.11. ábra

1.43. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}$ szám $\varepsilon > 0$ *sugarú környezete* a $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ intervallum.

Jelölés. Az $A \in \mathbb{R}$ szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $K_\varepsilon(A)$.

1.44. Megjegyzés. A környezet definíciójában a *sugár* szó használata nem véletlen. A valós számegyenesen az A szám ε sugarú környezete a síkon az A középpontú, ε sugarú nyílt körlap analogonja, hiszen éppen azok a számok tartoznak bele, melyek távolsága A-tól ε-nál kisebb. Eszerint tehát

$$x \in K_\varepsilon(A) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]A - \varepsilon; A + \varepsilon[\quad \Leftrightarrow \quad |x - A| < \varepsilon.$$

1.45. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke* az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor a_n az A ε sugarú környezetén belül van.

Kissé formálisabban ugyanez:

1.46. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke* az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

1.47. Megjegyzés. Definícióinkban tetszőleges $\varepsilon > 0$ szerepel. Ez felel meg annak a tulajdonságnak, hogy $\{a_n\}$ tagjai *tetszőlegesen közel* kerülnek A-hoz, tudniillik bármilyen pici $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét is tekintjük A-nak, egy bizonyos tagtól kezdve ezen környezeten belül található a sorozat minden további tagja.

Az 1.45, illetve az 1.46. definíciók szemléletes átfogalmazását adja a következő tétel.

1.48. Tétel. Legyen $\{a_n\}$ tetszőleges sorozat. Az alábbiak ekvivalensek:

1. az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám;
2. az A szám tetszőleges környezetén kívül $\{a_n\}$ sorozatnak csak véges sok tagja van.

Bizonyítás. $1 \Rightarrow 2$: Tegyük fel, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az A szám. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és tekintsük az $A \in \mathbb{R}$ szám ε sugarú környezetét. Ehhez létezik N, hogy ha $n > N$, akkor már a_n ezen környezeten belül található. A sorozat előtte lévő elemeiből csak véges sok van, tehát csak véges sok tag található az A szám ε sugarú környezetén kívül.

$2 \Rightarrow 1$: Tegyük fel, hogy az A szám tetszőleges környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és tekintsük A ε sugarú környezetét. A feltétel szerint ezen környezeten kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. Legyen N a legnagyobb index a sorozat ezen tagjainak indexei közül. Ha most $n > N$, akkor a_n már szükségképpen az A szám ε sugarú környezetén belül található. Ez éppen a határérték definíciója, vagyis $\{a_n\}$ sorozat határértéke A. $\square$

Jelölés. Annak jelölése, hogy az $\{a_n\}$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (ejtsd: *limesz en tart végtelenbe á en egyenlő Á*), a latin *limes* (határ) szóból. Rövidebb jelölés lehet esetleg a következő: $\lim a_n = A$.

Elnevezés. A definíciókban szereplő N szám függ a ε-tól, ezt néhol $N = N(\varepsilon)$ formában jelölik. N-t ε-hoz tartozó *küszöbszámnak* vagy *küszöbindexnek* nevezzük.

1.49. Megjegyzés. Ha N_1 egy adott ε-hoz tartozó küszöbszám, akkor minden $N' \geq N$ is jó küszöbszám.

1.50. Tétel. A sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B \in \mathbb{R}$ is teljesül, és indirekt tegyük fel, hogy $A \neq B$. Legyen $0 < \varepsilon < \dfrac{|A-B|}{2}$. Mivel $\{a_n\}$ sorozat határértéke A, ezért létezik N_1 küszöbindex, hogy ha $n > N_1$, akkor $\{a_n\}$ minden tagja az A szám ε sugarú környezetén belül van. Ugyanígy létezik N_2 küszöbszám, hogy ha $n > N_2$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat minden tagja a B szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén belül van. Legyen $N := \max\{N_1; N_2\}$. Ekkor, ha $n > N$, akkor az $\{a_n\}$ sorozat minden tagja az A ε sugarú környezetében, illetve a B ε sugarú környezetén belül van. Ez viszont ellentmondás, mert ε választása miatt e két környezet diszjunkt. Kezdeti feltevésünk tehát helytelen volt, következésképpen $A = B$. $\square$

1.51. Definíció. Amennyiben létezik az $\{a_n\}$ sorozat határtéke, úgy azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *konvergens*. Ellenkező esetben a sorozat *divergens*.

1.52. Megjegyzés. Ahhoz, hogy egy sorozat határértékét definíció alapján meghatározzuk:

- meg kell sejtenünk azt az A számot, amely a sorozat határértéke lehet;
- adott $\varepsilon > 0$-hoz találnunk kell N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

A határérték meghatározása definíció alapján tehát általában nem egyszerű feladat. Ugyanakkor nem muszáj a lehető legjobb küszöbszámot megtalálnunk, elegendő egyetlen megfelelő küszöbszámot mutatni, ami az adott ε-hoz jó. Nézzünk néhány egyszerű példát.

1.53. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk olyan N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor már $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Legyen $N := \frac{1}{\varepsilon}$. Ez jó küszöbszám, hiszen az ekvivalens átalakítások miatt, ha $n > N$, akkor már $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ teljesül. $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így valóban $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.54. Megjegyzés. Az 1.42. példában szereplő sorozatok esetén a definíció alapján nem nehéz megmutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$. Az $\{i_n\}$, $\{j_n\}$, $\{k_n\}$ sorozatoknak nincs határértéke.

Emlék. A határértékek definíció szerint történő kiszámításában segítségünkre vannak a következő összefüggések:

- minden a, b valós számra: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- minden a, b valós számra, $b \neq 0$ esetén $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

1.55. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk olyan N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor már

$\left|\frac{2n-3}{3n+2}-\frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n-3}{3n+2}-\frac{2}{3}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{3(2n-3)-2(3n+2)}{3(3n+2)}\right| &< \varepsilon\\ \left|\frac{-13}{3(3n+2)}\right| &< \varepsilon\\ \frac{13}{3(3n+2)} &< \varepsilon\\ \frac{1}{3}\left(\frac{13}{3\varepsilon}-2\right) &< n\end{aligned}$$

Legyen $N := \frac{1}{3}\left(\frac{13}{3\varepsilon}-2\right)$. Ekkor, ha $n > N$, a sorozat minden tagjának eltérése $\frac{2}{3}$-tól ε-nál kisebb. ε tetszőleges volt, azaz a kérdéses határérték-relációt igazoltuk.

1.56. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2-3n+5}=0$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk olyan N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor már $\left|\frac{2n+3}{n^2-3n+5}\right| < \varepsilon$. Az egyenlőtlenség megoldása jelen esetben meglehetősen komplikált lenne – bár képesek vagyunk rá, előbb *felülről becsüljük* a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát, majd a kapott, remélhetőleg egyszerűbb kifejezést becsüljük felülről ε-nal. Ezzel nem az optimális küszöbszámot kapjuk meg, de ez mindegy is: a fontos, hogy adott ε-hoz találjunk küszöbszámot, az nem számít, hogy ez mennyire optimális.

Nézzük tehát a definiáló egyenlőtlenség bal oldalát. $2n+3 > 0$ bármely n-re. A nevező zérushelyeit vizsgálva azt kapjuk, hogy a nevező is minden pozitív egész n-re pozitív. Eszerint az abszolútérték elhagyható:

$$\left|\frac{2n+3}{n^2-3n+5}\right| = \frac{2n+3}{n^2-3n+5} < \frac{2n+3n}{n^2-3n+5} < \frac{5n}{n^2-3n} = \frac{5n}{n(n-3)} = \frac{5}{n-3}.$$

Az első becslés tetszőleges pozitív egész n-re működik: a számlálót becsüljük felülről, ezáltal a tört értéke nő. A második becslés működik, ha $\underline{n > 3}$, mert ekkor $n^2-3n+5 > n^2-3n > 0$, azaz egy pozitív számlálójú és nevezőjű tört nevezőjét becsültük alulról egy még mindig pozitív számmal, ezáltal a tört értéke nő.

Elegendő a kapott kifejezést megbecsülni: $\frac{5}{n-3} < \varepsilon$, ha $\underline{\frac{5}{\varepsilon}+3 < n}$.

Legyen ennek megfelelően $N := \max\left\{5; \frac{5}{\varepsilon}+3\right\}$. Ha most $n > N$, akkor minden korábbi becslésünk működik, és

$$\left|\frac{2n+3}{n^2-3n+5}\right| < \frac{5}{n-3} < \varepsilon,$$

azaz N megfelelő ε-hoz tartozó küszöbszám. Ezzel igazoltuk, hogy a szóban forgó sorozat határértéke 0.

1.57. Példa. Mutassuk meg, hogy az $a_n = c$ konstans sorozat határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely n-re $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, azaz a bizonyítandó határérték-reláció teljesül.

1.5.1. Konvergens sorozatok tulajdonságai

Motiváció. Megvizsgáljuk a konvergencia és egyéb sorozatjellemzők kapcsolatát. Az igazán üdvös számunkra az lenne, ha sorozatok olyan tulajdonságait tudnánk meghatározni, melyekből már következik a konvergencia. Nézzük tehát a konvergencia és korlátosság, illetve monotonitás kapcsolatát!

1.58. Tétel. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$, azaz $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. A sorozatnak ugyanakkor csak véges sok N előtti indexű tagja van: legyen ezek maximuma M, minimuma m. Az eddigiek alapján tetszőleges n index esetén az

$$\min\{m; A - \varepsilon\} \le a_n \le \max\{M; A + \varepsilon\}$$

becsléshez jutottunk, ami éppen azt jelenti, hogy az $\{a_n\}$ sorozat korlátos. □

1.59. Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz: ha egy sorozat korlátos, akkor még nem feltétlenül konvergens. Jó ellenpélda például a $2, 3, 2, 3, \ldots$ sorozat: bár korlátos, nincs határértéke. Ugyanakkor érezzük, hogy ennél a sorozatnál a 2 és a 3 kitüntetett szerepű, ha nem is határérték.

1.60. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *torlódási pontja* T, ha T tetszőleges környezetében az $\{a_n\}$ sorozatnak végtelen sok tagja található.

1.61. Példa. A $2, 3, 2, 3, \ldots$ sorozatnak két torlódási pontja van: a $T_1 = 2$ és a $T_2 = 3$ is teljesíti a torlódási pont definícióját.

Az alábbi állítás szerint a torlódási pont a határérték fogalmának általánosítása.

1.62. Állítás. Ha egy sorozat konvergens, akkor a határértéke egyben torlódási pontja is.

Bizonyítás. Az 1.48. tétel szerint a határérték tetszőleges környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van. Ebből adódik, hogy a határérték tetszőleges környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme található, azaz a határérték egyben torlódási pont is. □

1.63. Megjegyzés. A határérték annyiban erősebb fogalom a torlódási pontnál, hogy nem elegendő, hogy tetszőleges környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja található, hanem az is kell, hogy bizonyos N-től kezdve *minden tagja* a szóban forgó környezetben van.

1.64. Megjegyzés. A konvergencia és a monotonitás önmagában még semmilyen kapcsolatban nem állnak egymással. Van olyan sorozat, ami monoton, de nem konvergens (például $a_n = n$), és van olyan sorozat, ami konvergens, de nem monoton (például $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$). A monotonitás és a korlátosság ugyanakkor együtt már implikálják a konvergenciát az alábbi nevezetes tétel szerint.

1.65. Tétel. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás. A tételt monoton növekvő sorozat esetén bizonyítjuk, a bizonyítás monoton csökkenő sorozat esetén hasonló. Tegyük fel tehát, hogy az $\{a_n\}$ sorozat monoton nő és korlátos. Ekkor felülről is korlátos, és van legkisebb felső korlátja: $\sup a_n =: A \in \mathbb{R}$. Megmutatjuk, hogy A a sorozat határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel A a sorozat szuprémuma, ezért létezik a_{n_0} tagja, melyre $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$ teljesül. Ha ugyanis ilyen elem nem lenne, akkor minden n indexre $a_n \leq A - \varepsilon$ teljesülne, akkor viszont nem A lenne a legkisebb felső korlát, hiszen $A - \varepsilon < A$. Eszerint tehát van a sorozatnak legalább egy eleme (tundiillik az a_{n_0}) az A szám ε sugarú környezetén belül. Ugyanakkor a sorozat monoton nő, vagyis ha $n \geq n_0$, akkor $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A$ teljesül. Az n_0. tagtól kezdve tehát a sorozat minden tagja az A szám ε sugarú környezetén belül van, azaz a sorozat konvergens, és határértéke A, a sorozat szuprémuma.

Monoton csökkenő, korlátos sorozat esetén hasonlóan kapjuk, hogy a sorozat konvergens, és határértéke a sorozat infimuma. □

1.66. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat egy *részsorozata* egy olyan sorozat, melynek tagjai az $\{a_n\}$ sorozat tagjai közül kerülnek ki.

Jelölés. Az $\{a_n\}$ sorozat valamely részsorozatát általában $\{a_{n_k}\}$-ként hivatkozzuk, hiszen nem másról van szó, minthog az $\{a_n\}$ sorozat tagjai közül kiválasztjuk az $\{n_k\}$ sorozatnak megfelelő indexűeket, és ezek sorozatát tekintjük.

1.67. Tétel. Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke A, akkor bármely részsorozata is konvergens és határértéke A.

Bizonyítás. Az 1.48. tétel alapján elegendő megmutatnunk, hogy A tetszőleges környezetén kívül a részsorozatnak csak véges sok eleme van. Ez viszont természetesen igaz, hiszen ez már az $\{a_n\}$ sorozatra is igaz, és az $\{a_n\}$ sorozat adott környezeten kívüli véges sok eleme közül a részsorozatnak is legfeljebb véges sok eleme lesz a környezeten kívül. □

1.68. Definíció. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok *összefésülése* a $\{c_n\}$ sorozat, melynek tagjai:

$$c_n := \begin{cases} a_k, & \text{ha } n = 2k+1;\ k \in \mathbb{Z}_0^+; \\ b_k, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

Némivel egyszerűbben szólva az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok összefésülése az $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat.

1.69. Tétel. Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke A, továbbá a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke A, akkor az összefésüléssel kapott $\{c_n\}$ sorozat is konvergens, és határértéke A.

Bizonyítás. Az 1.48. tétel alapján elegendő megmutatnunk, hogy A tetszőleges környezetén kívül $\{c_n\}$ sorozatnak csak véges sok eleme van. Ez viszont igaz, hiszen ez az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozatra is igaz, így az összefésüléssel kapott sorozatnak sem lehet végtelen sok eleme a környezeten kívül. □

1.70. Megjegyzés. Amennyiben olyan konvergens sorozatokat fésülünk össze, melyek határértékei nem egyeznek meg, a kapott sorozat nem lesz konvergens. Ugyanakkor lesz két torlódási pontja, méghozzá az eredeti két sorozat határértéke.

1.5.2. A határérték monotonitása

Motiváció. Becsléseink során sorozatok egyes tagjait másik sorozat tagjaival becsüljük alulról/felülről. Felmerül a kérdés, mit mondhatunk ekkor a sorozatok határértékéről.

1.71. Tétel (a határérték monotonitása)**.** Legyenek $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ olyan konvergens sorozatok, melyek határértéke rendre A, illetve B, továbbá minden n-re $a_n \leq b_n$ teljesül. Ekkor $A \leq B$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $B < A$. Legyen $\varepsilon < \dfrac{A-B}{2}$, és tekintsük az A, illetve B számok ε sugarú környezetét. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ezért létezik N_1 küszöbszám, hogy ha $n > N_1$, akkor $a_n \in K_\varepsilon(A)$. Ugyanígy, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_N = B$, ezért létezik N_2 küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $b_N \in K_\varepsilon(B)$. Legyen $N := \max\{N_1; n_2\}$. Ha most $n > N$, akkor $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozat minden tagja rendre $K_\varepsilon(A)$, illetve $K_\varepsilon(B)$ környezeten belül van. ε választása miatt ebből viszont $b_n < B + \varepsilon < A - \varepsilon < a_n$, azaz $b_n < a_n$ következik, ha $n > N$. Ez ellentmondás, hiszen minden n-re $a_n \leq b_n$. Kezdeti feltevésünk tehát helytelen volt, azaz $A \leq B$. □

A határték monotonitási tulajdonságához hasonló a következő tétel, amely sokszor bizonyul hasznosnak nehezebben meghatározható határértékek kiszámítása során.

1.72. Tétel (rendőr-elv)**.** Legyen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok, melyekre minden n-re $a_n \leq b_n \leq c_n$ teljesül, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. Ekkor a $\{b_n\}$ sorozat is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|b_n - A| < \varepsilon$. Legyen az $\{a_n\}$ sorozat ε-hoz tartozó egyik megfelelő küszöbszáma N_1, a $\{c_n\}$ sorozat ε-hoz tartozó egyik megfelelő küszöbszáma. Legyen $N := \max\{N_1; N_2\}$. Ha most $n > N$, akkor

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon,$$

azaz ha $n > N$, akkor $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, ami éppen azt jelenti, hogy $|b_n - A| < \varepsilon$. Ezzel az állítást beláttuk. □

1.73. Megjegyzés. Az 1.72. tétel *közrefogási elv* néven is ismeretes. Magyar nyelvterületen a legenda szerint Kürschák József (1864–1933) magyar matematikus kezdte *csendőrszabály* néven emlegetni, mégpedig a következő okból: amennyiben két csendőr közrefogja a gyanúsítottat, és a fogdába tartanak, akkor a gyanúsított is a fogdába fog tartani velük. Kürschák elmés metaforája aztán a matematikával foglalkozók széles körét megragadta. A csendőrség megszűnése után napjainkban elfogadott elnevezés lett a rendőr-elv. Szerencsésebb történelmi fejlődésű országokban *szendvics-szabály* néven is fut az állítás (a két kenyér közé tett hússzelet ugyanoda tart, ahová a két szelet kenyér tart).

1.5.3. Végtelenbe tartó sorozatok

Motiváció. Az $a_n = n$, $b_n = n^2$, $c_n = 2^n$ sorozatok esetén azt tapasztaljuk, hogy a sorozat tagjai *minden határon túl nőnek, a végtelenbe tartanak*. Érdemes kiterjeszteni ezért a sorozatok határértékének fogalmát végtelen határértékekre is.

1.74. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha minden $K > 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $K < a_n$.

1.75. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha minden $k < 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $a_n < k$.

Jelölés. A fenti határérték relációkat a következőképpen jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, illetve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

1.76. Megjegyzés. Néha, ha ki szeretnék hangsúlyozni, hogy a sorozat határértéke végtelen, nem pedig mínusz végtelen, akkor azt is szokták mondani, hogy a sorozat *határértéke plusz végtelen*, jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Elnevezés. A véges határértéknél látottakhoz hasonlóan a K, illetve k értékekhez tartozó N számot *küszöbszámnak* vagy *küszöbindexnek* nevezzük.

1.77. Megjegyzés. A véges határértéknél látottakhoz hasonlóan itt is igaz, hogy ha K-hoz (k-hoz) találunk egy alkalmas N küszöbszámot, akkor minden $N' > N$ is jó küszöbszám.

1.78. Példa. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - 3n + 5\right) = \infty$.

Megoldás. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $K > 0$ esetén létezik N küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor már $n^2 - 3n + 5 > K$. Természetesen megoldhatnánk a másodfokú egyenlőtlenséget, de egyszerűbb most is alulról becsülni a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát:

$$n^2 - 3n + 5 = n(n-3) + 5 > n(n-3) > (n-3)^2.$$

Az első becslés akkor lesz hatékony, ha $\underline{n > 3}$, mert ekkor még az $n(n-3)$ kifejezés is pozitív. A második becslés tetszőleges pozitív egész n-re működik, hiszen $n > n - 3$.

Elegendő a kapott kifejezést megbecsülni: $(n-3)^2 > K$, ha $\underline{n > \sqrt{K} + 3}$.

Legyen ennek megfelelően $N := \max\left\{3; \sqrt{K} + 3\right\}$, azaz $\sqrt{K} > 3$ miatt $N := \sqrt{K} + 3$. Ha most $n > N$, akkor minden korábbi becslésünk működik, és

$$n^2 - 3n + 5 > (n-3)^2 > K,$$

azaz N megfelelő K-hoz tartozó küszöbszám. Ezzel iazoltuk, hogy a szóban forgó sorozat határértéke ∞.

1.79. Megjegyzés. Hangsúlyozni szeretnénk annak jelentőségét, hogy a küszöbszám keresése során nem kell az optimálisat megtalálnunk. Az is igaz például, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^3 - 4n^2 + 5n - 7\right) = \infty$, de itt már az optimális küszöbszám megtalálása harmadfokú egyenlőtlenség megoldását jelentené, amit nem nagy örömmel hajtanánk végre, nem is beszélve esetleg még magasabb fokú polinomok vizsgálatáról.

1.80. Tétel. Néhány nevezetes határérték:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$, ha $k \in \mathbb{Z}^+$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$, ha $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, ha $a > 1$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = \infty$, ha $a > 1$.

Bizonyítás. 1. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Kell olyan N küszöbszámot találnunk, hogy ha $n > N$, akkor $n^k > K$. Ha $k = 1$, akkor $N := K$ megfelelő. Ha $k \geq 2$, akkor a k-adik gyökfüggvény szigorúan monoton növő volta miatt

$$n^k > K$$
$$n > \sqrt[k]{K}$$

Legyen $N := \sqrt[k]{K}$, ez megfelelő küszöbszám.

2. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Kell olyan N küszöbszámot találnunk, hogy ha $n > N$, akkor $\sqrt[k]{n} > K$. A k-adik hatványfüggvény szigorúan monoton növő volta miatt

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{n} &> K \\ n &> K^k \end{aligned}$$

Legyen $N := K^k$, ez megfelelő küszöbszám.

3. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Kell olyan N küszöbszámot találnunk, hogy ha $n > N$, akkor $a^n > K$. Mivel $a > 1$, az a alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, s így

$$\begin{aligned} a^n &> K \\ a &> \log_a K \end{aligned}$$

Legyen $N := \log_a K$, ez megfelelő küszöbszám.

4. Legyen $K > 0$ tetszőleges. Kell olyan N küszöbszámot találnunk, hogy ha $n > N$, akkor $\log_a n > K$. Mivel $a > 1$, az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, s így

$$\begin{aligned} \log_a n &> K \\ n &> a^K \end{aligned}$$

Legyen $N := a^K$, ez megfelelő küszöbszám.

Ezzel az állítást beláttuk. □

1.81. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozat *ellentettje* a $\{b_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $b_n = -a_n$ teljesül.

Jelölés. Az $\{a_n\}$ sorozat ellentettjének jelölése: $\{-a_n\}$.

1.82. Állítás. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -\infty$.

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $k < 0$ esetén létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $-a_n < k$. Ezzel ekvivalens: $a_n > -k$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ezért létezik N, hogy ha $n > N$, akkor már $a_n > -k$ teljesül. Az $\{a_n\}$ sorozat $-k$-hoz tartozó N küszöbszáma tehát megfelelő küszöbszám lesz a $\{-a_n\}$ sorozat esetén. □

1.83. Definíció. Legyen $\{a_n\}$ olyan sorozat, melynek egyik tagja sem 0. Ekkor az $\{a_n\}$ sorozat *reciproka* a $\{b_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ teljesül.

Jelölés. Az $\{a_n\}$ sorozat reciprokának jelölése: $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$.

1.84. Példa. Mit mondhatunk az $\{a_n\}$ sorozat reciprokának határértékéről, ha

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Megoldás. a) Ebben az esetben a reciprok-sorozat 0-ba tart. Valóban, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk olyan N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ezért van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor $\frac{1}{\varepsilon} < a_n$. Ekkor már $a_n > 0$ is teljesül, s emiatt az ilyen tagokra már egyszersmind

$$\frac{1}{\varepsilon} < a_n$$
$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$$

Legyen tehát N az $\{a_n\}$ sorozat $\frac{1}{\varepsilon}$-hoz tartozó valamely küszöbszáma, ez megfelelő küszöbszám lesz az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozathoz.

b) Ebben az esetben a reciprok-sorozat szintén 0-ba tart. Valóban, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk olyan N küszöbszámot, hogy ha $n > N$, akkor $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ezért van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor $a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$. Ekkor már $a_n < 0$ is teljesül, s emiatt az ilyen tagokra már egyszersmind

$$a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$$
$$\varepsilon > -\frac{1}{a_n}$$
$$\varepsilon > \left|\frac{1}{a_n}\right|$$
$$\varepsilon > \left|\frac{1}{a_n} - 0\right|$$

Legyen tehát N az $\{a_n\}$ sorozat $-\frac{1}{\varepsilon}$-hoz tartozó valamely küszöbszáma, ez megfelelő küszöbszám lesz az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozathoz.

c) Ebben az esetben nem tudunk általános érvényű választ adni. Ha például $a_n = \frac{1}{n}$, akkor a reciproksorozat határértéke ∞, ha viszont $a_n = -\frac{1}{n}$, akkor a reciproksorozat határértéke $-\infty$. Még érdekesebb példát szolgáltat az $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ sorozat: ennek reciproka a $b_n = (-1)^n n$ sorozat, melynek nincs határértéke.

A gyakorlatban előforduló sorozatok esetén azonban valamit mégsicsak mondhatunk. Ha például *feltesszük, hogy $a_n > 0$ minden n-re*, akkor már igaz lesz, hogy a reciprok-sorozat határértéke ∞. Valóban: tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $a_n > 0$ minden n-re. Legyen továbbá $K > 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk egy olyan N-t, hogy ha $n > N$, akkor $\frac{1}{a_n} > K$. Mivel most $a_n > 0$, ezért ezzel az egyenlőtlenséggel ekvivalens: $\frac{1}{K} > a_n$. Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - 0| < \frac{1}{K}$, azaz $a_n > 0$ miatt $a_n < \frac{1}{K}$. Ez a N tehát jó K-hoz tartozó küszöbszám az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozat esetében.

Hasonlóképpen: ha *feltesszük, hogy $a_n < 0$ minden n-re*, akkor már igaz lesz, hogy a reciprok-sorozat határértéke $-\infty$. Valóban: tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $a_n < 0$ minden n-re. Legyen továbbá $k < 0$ tetszőleges. Kell mutatnunk egy olyan N-t, hogy ha $n > N$, akkor $\frac{1}{a_n} < k$. Mivel most $a_n < 0$, $k < 0$, ezért ezzel az egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} &< a_n\\ -\frac{1}{k} &> -a_n\\ -\frac{1}{k} &> |a_n|\\ -\frac{1}{k} &> |a_n - 0|\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - 0| < -\frac{1}{k}$. Ez a N tehát jó k-hoz tartozó küszöbszám az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozat esetében.

A következő tételt bizonyítottuk.

1.85. Tétel. A végtelen és a nulla határértékek, mint reciproksorozatok határértékei:

1. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
2. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
3. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és minden n-re $a_n > 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.
4. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és minden n-re $a_n < 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

1.86. Megjegyzés. Amennyiben $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $a_n > 0$ minden n-re, úgy azt is szokás mondani, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *jobbról tart* 0-ba, és ezt így is szokás jelölni: $\lim_{n\to\infty} a_n = +0$.

Ugyanígy: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $a_n < 0$ minden n-re, úgy azt is szokás mondani, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *balról tart* 0-ba, és ezt így is szokás jelölni: $\lim_{n\to\infty} a_n = -0$.

Ezekkel a jelölésekkel az 1.85. tétel 3. és 4. pontja egyszerűbb alakot ölt:

3. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.
4. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Csendben megjegyezzük, hogy a fenti határérték-relációkat általában a következőképpen tartjuk észben:

$$\frac{1}{\infty} = 0; \qquad \frac{1}{-\infty} = 0; \qquad \frac{1}{+0} = \infty; \qquad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Hangsúlyozzuk azonban, hogy ezen rövid formulák a fenti tétel gyorsabb előhívását szolgálják csupán, a végtelen nem egy szám, 0-val pedig továbbra sem oszthatunk.

1.87. Tétel. Néhány nevezetes határérték:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, ha $k \in \mathbb{Z}^+$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$, ha $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $0 < a < 1$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = -\infty$, ha $0 < a < 1$.

Bizonyítás. Az első két állítás közvetlenül adódik az 1.80. és az 1.85. tételekből.

A harmadik állítás következik abból, hogy ha $0 < a < 1$, akkor $b := \frac{1}{a} > 1$, így az 1.80. tétel 3. pontja szerint $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = \infty$. Az 1.85. tétel alapján így $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ következik, mert $\{a^n\}$ és $\{b^n\}$ sorozatok egymás reciprokai:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0.$$

A negyedik állítás következik abból, hogy ha $0 < a < 1$, akkor $b := \frac{1}{a} > 1$, így az 1.80. tétel 4. pontja szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \log_b n = \infty$. Felhasználva az 1.82. állítást (és hogy $b = \frac{1}{a}$ miatt $\log_b a = -1$):

$$\lim_{n\to\infty} \log_a n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{\log_b a} = \lim_{n\to\infty} -\log_b n = -\infty.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

1.5.4. Műveletek konvergens sorozatokkal

Motiváció. A határérték kiszámítása definíció szerint meglehetőségen nehéz feladat. Néhány összefüggést már megállapítottunk a 0 és a végtelen határérték vonatkozásában. Most azt nézzük meg, hogy ha alapműveleteket végzünk konvergens sorozatokkal, akkor mit mondhatunk a határértékükről. Először persze azt kell meggondolnunk, mit is értünk sorozatokkal végzett alapműveletek alatt.

1.88. Definíció. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok *összege* az a $\{c_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $c_n = a_n + b_n$ teljesül.

1.89. Definíció. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok (ebben a sorrendben vett) *különbsége* az a $\{c_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $c_n = a_n - b_n$ teljesül.

1.90. Definíció. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok *szorzata* az a $\{c_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $c_n = a_n \cdot b_n$ teljesül.

1.91. Definíció. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$) sorozatok (ebben a sorrendben) *hányadosa* az a $\{c_n\}$ sorozat, melynek tagjaira $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ teljesül.

Jelölés. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának jelölése rendre $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$.

1.92. Tétel. Legyenek $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergens sorozatok, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Ekkor

1. az $\{a_n + b_n\}$ sorozat is konvergens, és
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B;$$
2. az $\{a_n - b_n\}$ sorozat is konvergens, és
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B;$$
3. az $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozat is konvergens, és
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B;$$
4. $b_n \neq 0$, $B \neq 0$ esetén az $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ sorozat is konvergens, és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}.$$

A tétel bizonyítása előtt igazolunk egy, a matematikai analízisben igen fontos segédtételt, lemmát – a *lemma* kifejezés latin eredetű, matematikai szakirodalomban hagyományosan a segédtétel szinonimája.

1.93. Lemma (háromszög-egyenlőtlenség)**.** Ha a, b tetszőleges valós számok, akkor $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok esetén $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, ez az elemi geometriából is ismert háromszög-egyenlőtlenség. Legyen most tetszőleges a, b valós számok esetén $\mathbf{a}(a; 0)$, $\mathbf{b}(b; 0)$, ekkor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a + b; 0)$, továbbá
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{(a + b)^2 + 0^2} = |a + b|\,; \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|\,, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{b^2 + 0^2} = |b|\,,$$
azaz a háromszög-egyenlőtlenségből éppen a bizonyítandó állítás következik. □

Az 1.92. tétel bizonyítása. 1. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ezért $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz kétezik N_1, hogy $\underline{\text{ha } n > N_1, \text{ akkor } |a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, ezért $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz kétezik N_2, hogy $\underline{\text{ha } n > N_2, \text{ akkor } |b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}}$.

A háromszög-egyenlőtlenség szerint
$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
ha $n > \max\{N_1; N_2\}$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $N := \max\{N_1; N_2\}$ megfelelő küszöbszám, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

2. Először is meggondoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -A$. Valóban, legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ezért ε-hoz létezik N, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Emiatt

$$|-a_n - (-A)| = |-(a_n - A)| = |a_n - A| < \varepsilon,$$

na $n > N$. Eszerint $\varepsilon > 0$-hoz N megfelelő küszöbszám, vagyis valóban $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -A$.

Használva a korábbi pontban igazolt állítást:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + (-b_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B.$$

3. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\{b_n\}$ konvergens, ezért korlátos: létezik $K > 0$, hogy minden n-re $|b_n| < K$ teljesül.

Először igazoljuk az állítást, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = 0$.

Ekkor $\dfrac{\varepsilon}{K}$-hoz létezik n, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{K}$, és

$$|a_n b_n - 0| = |(a_n - 0)\, b_n| = |a_n - 0| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

azaz ε-hoz N jó küszöbszám.

Ha most $A \neq 0$: mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ezért $\dfrac{\varepsilon}{2K}$-hoz létezik N_1, hogy ha $n > N_1$, akkor $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$.
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, ezért $\dfrac{\varepsilon}{2\,|A|}$-hez létezik N_2, hogy ha $n > N_2$, akkor $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|A|}$.

A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |(a_n - A)\, b_n + A\,(b_n - B)| \leq$$
$$\leq |a_n - A| \cdot |b_n| + A \cdot |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2\,|A|} = \varepsilon,$$

ha $n > \max\{N_1; N_2\}$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $N := \max\{N_1; N_2\}$ megfelelő küszöbszám, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

4. Először megmutatjuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, $b_n \neq 0$, $B \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{B}$. Ehhez gondoljuk meg a következőt: mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, ezért létezik N_1, hogy ha $n > N_1$, akkor már $|b_n - B| < \dfrac{|B|}{2}$.
Ezzel ekvivalens:

$$-\frac{|B|}{2} < b_n - B < \frac{|B|}{2}$$

$$B - \frac{|B|}{2} < b_n < B + \frac{|B|}{2}$$

Ha $B > 0$, akkor ebből $\dfrac{B}{2} < b_n < \dfrac{3B}{2}$, ha $B < 0$, akkor ebből $\dfrac{3B}{2} < b_n < \dfrac{B}{2}$ következik.

Azaz: ha $B > 0$, akkor $\frac{|B|}{2} < |b_n|$, ha pedig $B < 0$, akkor $-|b_n| < -\frac{|B|}{2}$. Vagyis: ha $n > N_1$, akkor azt kaptuk, hogy $|b_n| > \frac{|B|}{2}$, azaz $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}$.

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Ekkor $\frac{\varepsilon \cdot |B|^2}{2}$-höz létezik N_2, hogy ha $n > N_2$, akkor $|b_n - B| < \frac{\varepsilon \cdot |B|^2}{2}$.

Így aztán

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{b_n - B}{Bb_n}\right| = \frac{|b_n - B|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{\varepsilon \cdot |B|^2}{2} \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|} = \varepsilon,$$

ha $n > \max\{N_1; N_2\}$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $N := \max\{N_1; N_2\}$ megfelelő küszöbszám, így $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

Térjünk most rá a bizonyítandó állításra. Felhasználva a korábban bizonyítot 3. pontot, illetve az imént igazoltakat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

Ezzel az állításokat beláttuk. □

1.94. Megjegyzés. Az 1.92. tétel igen hasznos eszköz a határérték kiszámítására. Bizonyos esetekben az állítások végtelen határértékekre is kiterjeszthetők az értelemszerű, szemlélet által sugallt tartalmakkal. Értjük ez alatt a következőket:

1. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = -\infty$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \infty$,
   - $A \neq 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0; \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \end{cases}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$,
   - $a_n \neq 0, A \neq 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0; \\ -\infty, & \text{ha } A < 0. \end{cases}$
2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$.

A fenti határérték-relációkat a következőképpen tartjuk észben:

$$A+\infty=\infty;\quad A-\infty=-\infty;\quad \infty-A=\infty;\quad A\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & \text{ha } A>0;\\ -\infty, & \text{ha } A<0;\end{cases}\quad \frac{A}{\infty}=0;\quad \frac{\infty}{A}=\begin{cases}\infty, & \text{ha } A>0;\\ -\infty, & \text{ha } A<0;\end{cases}$$

illetve

$$\infty+\infty=\infty;\quad \infty\cdot\infty=\infty.$$

Hangsúlyozzuk azonban, hogy ezen rövid formulák a fenti tétel gyorsabb előhívását szolgálják csupán, a végtelen továbbra sem egy szám.

Ugyanakkor vannak olyan típushatárértékek, úgynevezett *határozatlan esetek*, melyeknél nem tudunk a fentiekhez hasonló egyszerű formulát találni. Ezek a következők:

1. $\infty-\infty$ típusú határérték: konkrét feladattól függően bármilyen eredményt adhat.

   - Ha pl. $a_n=n^2$, $b_n=n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-n\right)=\infty$.
   - Ha pl. $a_n=n$, $b_n=n^2$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-n^2\right)=-\infty$.
   - Ha pl. $a_n=n$, $b_n=n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n-n)=0$. Ugyanilyen módszerrel viszont bármilyen C valós szám is elállhat határértékként, pl. $a_n=n+C$, $b_n=n$ választással.

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határérték: konkrét feladattól függően bármilyen eredményt adhat.

   - Ha pl. $a_n=n^2$, $b_n=n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$.
   - Ha pl. $a_n=n$, $b_n=n^2$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.
   - Ha pl. $a_n=n$, $b_n=n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$. Ugyanilyen módszerrel viszont bármilyen C valós szám is elállhat határértékként, pl. $a_n=C\cdot n$, $b_n=n$ választással.

3. $\dfrac{0}{0}$ típusú határérték: konkrét feladattól függően bármilyen eredményt adhat.

   - Ha pl. $a_n=\dfrac{1}{n^2}$, $b_n=\dfrac{1}{n}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.
   - Ha pl. $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{1}{n^2}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$.

- Ha pl. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, és $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Ugyanilyen módszerrel viszont bármilyen C valós szám is elállhat határértékként, pl. $a_n = \frac{C}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ választással.

4. $0 \cdot \infty$ típusú határérték: konkrét feladattól függően bármilyen eredményt adhat.

- Ha pl. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, és $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Ha pl. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n^2$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, és $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.
- Ha pl. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, és $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Ugyanilyen módszerrel viszont bármilyen C valós szám is elállhat határértékként, pl. $a_n = \frac{C}{n}$, $b_n = n$ választással.

Ezeknél a határértékeknél tehát nem tudunk szabályt alkalmazni, valamilyen ügyesebb módszerhez kell folyamodnunk. A gyakorlatban azonban az ilyen típusú határértékeket is sokszor visszavezetjük olyanokra, melyek kiszámítása során már az 1.92. tétel eredményei alkalmazhatóak.

1.95. Feladat. [[2] 1171] Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3-5n^2}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-7n+3}{2n^2+3n-5}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^4}{9n^4+n^3-2n+5}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+12}{3n^3-n^2-5n-1}$;

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+5}}$;

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{2\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

Megoldás. Ügyes átalakítások után minden esetben az 1.92. tételt, illetve az 1.87. tétel 1. pontját alkalmazzuk.

a) n^2-tel egyszerűsítünk: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3-5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{3}{n^2}-5} = \frac{0}{0-5} = \underline{\underline{0}}$.

b) n^2-tel egyszerűsítünk: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-7n+3}{2n^2+3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}} = \frac{1-0+0}{2+0-0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

c) n^4-nel egyszerűsítünk: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^4}{9n^4+n^3-2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-1}{9+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}} = \dfrac{0-1}{9+0-0+0} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{9}}}.$

d) n^3-nal egyszerűsítünk: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+12}{3n^3-n^2-5n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{12}{n^3}}{3-\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}} = \dfrac{2+0}{3-0-0-0} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}}.$

e) Ezúttal kissé trükkösebb a helyzet. A nevezőben másodfokú kifejezésből vonunk négyzetgyököt, ezért $\sim n$ nagyságrendű, akárcsak a számláló. Emiatt most n-nel egyszerűsítünk, ami a négyzetgyökjel alatt n^2-tel történő egyszerűsítést jelent:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{2}}.$$

Az utolsó előtti lépésben azt használtuk fel, hogy amennyiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ egy pozitív tagokból álló sorozatra, úgy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$. Ezt a gondolatot egyelőre szemléletből elfogadjuk – később látni fogjuk, hogy ez a *négyzetgyökfüggvény folytonossága* miatt van így.

f) Ismét n-nel egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{2\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} - \frac{2\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}\right) = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1-0}} - \frac{2\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}} = \underline{\underline{-1}}.$$

Az utolsó előtti lépésben ismét a négyzetgyökfüggvény folytonosságát használtuk.

1.96. Megjegyzés. Az 1.95. tétel alapján megfogalmazhatjuk a következőket: amennyiben polinomok hányadosaként előálló sorozat határértékét kell kiszámolnunk, egyszerűsítsük a polinomot a legnagyobb fokszámú n-hatvánnyal. Az így nyert hányadosban már alkalmazhatóak az 1.92. tétel eredményei. A közvetlen kiszámítás azért nem működik, mert a – nem konstans – polinomok határértékei ∞ vagy $-\infty$ lehetnek, így tipikusan $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú határértékről van szó.

1.97. Feladat ([2] 1172)**.** Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{1+2+3+\ldots+n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+\ldots+2n}{3n-5}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

Megoldás. Használjuk a korábban már látott, hatványösszegekre vonatkozó képleteket, valamit az előző feladatban látott módszert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{1+2+3+\ldots+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+n} = 2\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 2\cdot \dfrac{2+0}{1+0} = \underline{\underline{4}}.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+\ldots+2n}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\,(1+2+\ldots+n)}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{3n-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}} =$

$\underline{\underline{\infty}}$, mert az utolsó lépésben már $\dfrac{C}{+0}$ típusú határértékkel van dolgunk (ezt onnan tudjuk, hogy elég nagy n-re már $3n-5>0$, és a nevező előjele n^2-tel történő egyszerűsítés után nem változik meg).

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{1^2+2^2+\ldots+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = 6\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{(n^2+n)\,(2n+1)} =$

$= 6\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n^2+3}{2n^3+3n^2+n} = 6\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^3}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 6\cdot \dfrac{1-0+0}{2+0+0} = \underline{\underline{3}}.$

Irodalom

[1] Mahler Attila és Orosz Gyula. *Gyűjtemény a matematika emelt szintű oktatásához 11-12.* Oktatási Hivatal, 2022.

[2] Dr. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József és Szászné dr. Simon Judit. *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Oktatási Hivatal, 2005.