Markó Zoltán

# Teljes indukció

Jegyzet (kézirat)

2024. július 3.

# Tartalomjegyzék

# 1.

# Teljes indukció

Sokféle olyan matematikai kérdést tehetünk fel, amely valamilyen természetes számtól függ. Zárt képletet már ismerünk az első $n$ pozitív természetes szám összegére, de felmerülhet a kérdés, hogy van-e zárt alakja az $1^2+2^2+\ldots+n^2$ kifejezésnek, illetve általában mit mondhatunk az $1^k+2^k+\ldots+n^k$ összegről ($n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}^+$). Értelmes kérdés, hogy legfeljebb hány részre osztja a síkot $n$ egyenes, $n$ kör, stb. Amennyiben ezen kérdésekre megsejtjük a választ, azt teljes indukcióval tudjuk bizonyítani.

**Motiváció.** Adott egy végtelen hosszú lépcső, és ennek tövében egy béka. Adjunk meg lehetőleg minél kevesebb olyan képességet, amelyet a békának tudnia kell ahhoz, hogy a lépcső bármelyik fokára eljuthasson! Ahhoz, hogy ez teljesüljön, két feltételt elegendő teljesíteni:

1. a béka tudja megugrani az első lépcsőfokot;
2. feltéve, hogy egy adott lépcsőfokra eljutott, legyen képes a következőre is felugrani.

Ezen két feltétel teljesülése esetén a béka a lépcső bármelyik fokára eljuthat.

Ezen gondolat vezet el bennünket a *teljes indukciós bizonyítás* elvéhez. Legyen adott végtelen sok állítás: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, stb. A teljes indukció során két lépést hajtunk végre:

1. Megmutatjuk, hogy $A_1$ igaz.
2. Feltesszük, hogy $A_n$ igaz: ezt nevezzük *indukciós feltételnek*. Majd ezt felhasználva megmutatjuk, hogy ebben az esetben $A_{n+1}$ is igaz.

Ha ezt a két lépést meg tudjuk tenni, akkor bármely $A_n$ állítás igaz. Valóban: $A_1$ igaz, hiszen bizonyítottuk. Akkor viszont a második lépés igazsága miatt $A_2$ is igaz. Ha viszont $A_2$ is igaz, akkor a második lépés szerint $A_3$ is igaz, stb. Az állítások igazságtartalma öröklődik, ahogy a béka is fel tud ugrani bármelyik lépcsőfokig, amennyiben az első lépést képes megugrani, és amennyiben valahová már eljutott, még egy szinttel tovább tud ugrani. A következőkben a teljes indukció néhány tipikus alkalmazását tekintjük át.

## 1.1. Összegzések

**Motiváció.** A matematika legkülönbözőbb területein fordul elő, hogy egy számsorozat első néhány tagjának összegét kell meghatároznunk. Az összegek egyetlen képlettel történő felírását *zárt alaknak* nevezzük. Az alábbiakban igazoljuk az első $n$ pozitív egész szám négyzetösszegére, illetve köbösszegére vonatkozó zárt alakokat.

**1.1. Példa.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Megoldás.* Teljes indukcióval. 1. lépés: $n = 1$-re a bal oldal: $1^2 = 1$, a jobb oldal: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. A két kifejezés egyenlő, $n = 1$-re tehát az állítás igaz.

2. lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz $n$-re, vagyis

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ez az indukciós feltétel. Az állítás ekkor $n+1$-re a következő:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Az indukciós feltétel alapján ezzel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) &= \frac{(n+2)(2n+3)}{6} \\ 2n^2 + n + 6n + 6 &= 2n^2 + 3n + 4n + 6 \\ 2n^2 + 7n + 6 &= 2n^2 + 7n + 6 \end{aligned}$$

A kapott egyenlőség igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, azt kaptuk (az indukciós feltétel felhasználásával), hogy az állítás $n+1$-re is igaz.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

**1.2. Példa.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

*Megoldás.* Teljes indukcióval. 1. lépés: $n = 1$-re a bal oldal: $1^3 = 1$, a jobb oldal: $\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1$. A két kifejezés egyenlő, $n = 1$-re tehát az állítás igaz.

2. lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz $n$-re, vagyis

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

ez az indukciós feltétel. Az állítás ekkor $n+1$-re a következő:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Az indukciós feltevés alapján ezzel ekvivalens:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
$$\frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{(n+2)^2}{4}$$
$$n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

A kapott egyenlőség az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nevezetes azonosság értelmében igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, azt kaptuk (az indukciós feltétel felhasználásával), hogy az állítás $n+1$-re is igaz.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

**1.3. Megjegyzés.** Érdemes megjegyeznünk, hogy az 1.1. és az 1.2. példák eredményei kiegészíthetők az $1 + 2 + \ldots + n$ összeg zárt alakban történő felírásával, melyet már korábbi tanulmányaink során megtettünk. Azt láttuk, hogy $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Eszerint a következőket mondhatjuk:

- $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Önmagában érdemes az első és a harmadik sort összehasonlítani, melyek szerint

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Az $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ összeg zárt alakban felírása, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, önmagában érdekes kérdés. Látjuk, hogy az eredmény *megsejtése* után az teljes indukcióval bizonyítható. A nehézséget általában az jelenti, hogy legyen ötletünk a zárt alakot megadó képlet megadására. Ez $k = 1$-re meglehetősen egyszerű, $k = 2$-re már jóval bonyolultabb. Vannak geometriai meggondolások, melyek segítségével e képletek megsejthetők, nagyobb $k$-kra egyéb módszerek is ismeretesek.

Számunkra a fenti három összegzési képlet ismerete fontos, a későbbiekben többször is használni fogjuk őket.

### 1.1.1. Szummák és produktumok

Az 1.3. megjegyzés formuláinak precíz leírása a *szumma jelöléssel* történik. A $\ldots$ szimbólum használata szigorúan véve nem precíz, hiszen bár mindenkinek vannak elképzelései, valójában semmi nem indokolja, hogy egy $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ típusú kifejezésben éppen a hiányzó, 2 és $n$ közötti egész számok $k$-adik hatványai szerepeljenek. Amennyiben adottak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, az összegüket a következőképpen jelöljük:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

A bal oldali kifejezés kiejtése: *szumma i egyenlő* 1*-től n-ig*. Az indexek persze más betűvel is jelölhetők. Ekkor a fenti formuláink a következő alakot öltik:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

A szumma jelölés használata a precizitáson kívül néha nagyon praktikus a bizonyítások szempontjából is. Érdemes egyre jobban hozzászoknunk a jelölés használatához, illetve a szummákkal való számolás szabályaihoz. A szumma jelölés definíciójából következnek a következő azonosságok:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i; \quad \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Vannak olyan összegzési feladatok, melyekben a zárt alak megsejtése a szumma jelölés használatával, és már ismert összegzési képletek felhasználásával történhet.

**1.4. Feladat** ([3] 1056. a) nyomán)**.** Írjuk fel a következő kifejezést zárt alakban!

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1).$$

*Megoldás.* Írjuk fel a kifejezést szummával, majd bontsuk szét a kapott összeget két ismert összegre.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 + i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i.$$

A kapott két összeg zárt alakját ismerjük. Ennek megfelelően

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ha ezt az összefüggést valaki megsúgta volna, teljes indukcióval is igazolhattuk volna. A szumma jelölés segítségével viszont formálisan könnyen vissza tudtuk vezetni a kérdéses összeget korábban meghatározott összegekre, és ezzel súgás nélkül is meg tudtuk határozni a zárt alakot.

**1.5. Feladat.** [[3] 1050. c) nyomán] Írjuk fel a következő kifejezést zárt alakban!

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

*Megoldás.* Kétféle megoldást is mutatunk. Az első során nézzük meg az első néhány $n$-re, hogy milyen értéket kapunk. $n = 1$-re $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $n = 2$-re $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$, $n = 3$-ra $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$. Ennek alapján kialakul bennünk az a sejtés, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ha már van sejtésünk, akkor megpróbálhatjuk teljes indukcióval bizonyítani azt.

1. lépés: $n = 1$-re sejtésünk igaz, mint láttuk.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n$-re, vagyis

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

ez az indukciós feltétel. Ekkor $n + 1$-re a következőt kellene belátnunk:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Az indukciós feltétel szerint ezzel ekvivalens:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n+1}{n+2} \\ n \cdot (n+2) + 1 &= (n+1)^2 \\ n^2 + 2n + 1 &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Ez az $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ nevezetes azonosság szerint igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, azt kaptuk (az indukciós feltétel felhasználásával), hogy sejtésünk $n + 1$-re is igaz.

A teljes indukció elve értelmében a sejtést igazoltuk.

Második megoldásunk nem használ sejtést. Ötletünk a következő: keressünk olyen $A$, $B$ valós számokat, hogy minden pozitív egész $n$-re igaz legyen az

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

összefüggés. Közös nevezőre hozva:

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot (n+1) + B \cdot n \\ 1 &= (A+B) \cdot n + A \end{aligned}$$

A bal oldal értéke $n$-től függetlenül mindig 1, a jobb oldalon $n$-nek lineáris függvénye áll. Ebből következik, hogy a jobb oldalon $n$ együtthatójának 0-nak, míg a konstans tagnak 1-nek kell lennie. Ez azt jelenti, hogy $A + B = 0$, $A = 1$, amiből $B = -1$ is következik. Találtunk tehát megfelelő $A$ és $B$ konstansokat:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Az $\frac{1}{n \cdot (n+1)}$ kifejezés ezen felbontását nevezik *parciális törtekre bontásnak* (a *parciális* szó jelentése: *rész-*). Hasznos módszer, máskor is találkozunk majd vele.

Visszatérve az eredeti összegre, ennek minden tagját fel tudjuk bontani az előző összefüggés segítségével (a látvány kedvéért az utolsó előtti tagot is kiírjuk):

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Vegyük észre, hogy ebben az összegben az első és az utolsó tag kivételével minden tag kiesik. Az ilyen összeget hívják *teleszkópos összegnek*. Eszerint

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Közvetlen számolással megkaptuk azt a formulát, amit előző megoldásunkban megsejtettünk, majd teljes indukcióval bizonyítottunk.

A parciális törtekre bontással történő számolást szummákkal is megmutatjuk, illusztrálva ennek eleganciáját, rövidségét. Kérdés a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}$$

összeg zárt alakja. Az általános tag $\frac{1}{i\cdot(i+1)}$, ennek parciális törtekre bontást elvégezzük a fentiek szerint, majd számolásunk a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}=\\&=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},\end{aligned}$$

mivel a köztes tagok látványosan kiejtik egymást. A szummával történő számolásban használtunk egy ügyes trükköt, az *átindexelést*:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}\underset{j:=i+1}{\underset{\uparrow}{=}}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}.$$

$i+1$ helyett $j$-t írunk, ekkor a határok is változnak: nem 1-től $n$-ig, hanem 2-től $n+1$-ig szummázunk. Mivel teljesen mindegy, mivel jelöljük a futó indexet, $j$ helyett visszatérünk $i$-re, így látványos a megfelelő elemek kiesése az átalakítás után.

**1.6. Megjegyzés.** Az összegzés rövidebb, illetve precízebb leírására a szumma jelölés szolgál, analóg módon definiálható szorzatok esetén a *produktum*. Amennyiben adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok, a szorzatukat a következőképpen jelöljük:

$$\prod_{i=1}^{n}a_i:=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n.$$

A bal oldali kifejezés kifejtése: *produktum i egyenlő* 1*-től n-ig*. Az indexek itt is jelölhetők más betűvel. Ezzel a jelöléssel például $\prod_{i=1}^{n} i=n!$.

## 1.1.2. Egyenlőtlenségek

Összegek zárt alakban meghatározása teljes indukcióval többnyire egyszerű, ha eleve ismerjük/megsejtjük/megsúgták a zárt alakot. Viszont sokszor zárt alakot nem tudunk mondani, ugyanakkor kialakul sejtésünk arról, hogy legfeljebb/legalább mennyi a szóban forgó összeg, vagyis szeretnénk felső/alsó becslést igazolni. Teljes indukcióval az ilyen becslések egy része is bizonyítható, ugyanakkor a bizonyítás technikája több odafigyelést igényel, mint amikor egyenlőségekkel van dolgunk. Általánosan elmondható egyébként, hogy egyenlőtlenségekkel sokkal nehezebb dolgozni, mint egyenletekkel.

**1.7. Feladat** ([2] 124)**.** Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget minden $n \geq 2$ egész számra!

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

*Megoldás.* Teljes indukcióval bizonyítunk. 1. lépés: $n = 2$-re az állítás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} &> \sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 1 &> 2 \\ \sqrt{2} &> 1 \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, ekvivalens átalakítások miatt az állítás $n = 1$-re igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n$-re, vagyis

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},$$

ez az indukciós feltétel. Azt kellene igazolnunk, hogy $n + 1$-re igaz a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}. \tag{1.1}$$

Az indukciós feltétel alapján ezen bizonyítandó állítás bal oldalának első $n$ tagjából álló összeget tudjuk becsülni:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ha tudnánk igazolni, hogy $n \geq 2$ egész szám esetén

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}, \tag{1.2}$$

akkor ezzel az (1.1) összefüggést is igazoltuk. Nézzük hát az (1.2) egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n+1} \\ \sqrt{n(n+1)} + 1 &> n + 1 \\ \sqrt{n(n+1)} &> n \end{aligned}$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, ezzel ekvivalens:

$$\begin{aligned} n^2 + n &> n^2 \\ n &> 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, hiszen $n \geq 2$. Mivel minden átalakításunk ekvivalens volt, az (1.2) egyenlőtlenség igaz, így az indukciós feltétel felhasználásával az (1.1) $n + 1$-re vonatkozó állítás is következik.

A teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

**1.8. Feladat** ([1] 246/4)**.** Milyen $n$ természetes számra teljesül, hogy $2^n > n^2$?

*Megoldás.* $n = 0$-ra az egyenlőtlenség igaz, hiszen $2^0 = 1$, $0^2 = 0$. $n = 1$-re az egyenlőtlenség szintén igaz, hiszen $2^1 = 2 > 1 = 1^2$. $n = 2$-re nem teljesül az állítás, ekkor ugyanis egyenlőség van. $n = 3$-ra: $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, szintén nem igaz az egyenlőtlenség, míg $n = 4$-re ismét egyenlőséget kapunk: $2^4 = 17 = 4^2$. Ha $n = 5$, akkor $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, az egyenlőtlenség ismét teljesül. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha $n \geq 5$ természetes szám, akkor már mindig teljesülni fog a szóban forgó egyenlőtlenség.

1. lépés: $n = 5$-re, mint láttuk, az egyenlőtlenség igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz valamely $n \geq 5$ természetes számra, azaz

$$2^n > n^2,$$

ez az indukciós feltétel. Azt kellene megmutatnunk, hogy az egyenlőtlenség $n + 1$-re is igaz, vagyis

$$2^{n+1} > (n+1)^2. \tag{1.3}$$

Az indukciós feltétel felhasználásával becsüljük alulról a bal oldalt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2. \tag{1.4}$$

Ha sikerül megmutatnunk, hogy $2 \cdot n^2 > (n+1)^2$, akkor az (1.4) becslés alapján az (1.3) egyenlőtlenség is igazolást nyer. Nézzük a hiányzó lépést:

$$\begin{aligned} 2 \cdot n^2 &> (n+1)^2 \\ 2 \cdot n^2 &> n^2 + 2n + 1 \\ n^2 - 2n - 1 &> 0 \end{aligned}$$

A másodfokú egyenlőtlenséget megoldva azt kapjuk, hogy ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, ha $n \geq 3$ (most $n$ természetes szám). Ez a feltétel viszont most teljesül, hiszen feltettük, hogy $n \geq 5$. A hiányzó lépés tehát minden $n \geq 5$ természetes szám esetén igaz, így a fentiek szerint a becslést $n+1$ esetén is igazoltuk az indukciós feltétel felhasználásával.

A teljes indukció elve értelmében tehát beláttuk, hogy $2^n > n^2$, ha $n \geq 5$ természetes szám. Az 5-nél kisebb természetes számok esetén pedig azt tapasztaltuk, hogy az egyenlőtlenség áll $n = 0$, $n = 1$ és $n = 3$ esetén.

**1.9. Megjegyzés.** Az 1.8. feladat szép példája annak, hogy az indukció esetleg csak későbbi kezdőlépéssel kezdődik el, mint amit elsőre gyanítanánk. $n = 0$-ra és $n = 1$-re a becslés igaz volt, ugyanakkor pusztán ebből kiindulva nem tudtunk volna indukcióval bizonyítani, mert az indukciós lépés felhasználása mellett az $n^2 - 2n - 1 > 0$ egyenlőtlenségnek is igaznak kell lennie, hogy az állítást $n + 1$-re igazolni tudjuk. Ez utóbbi egyenlőtlenség csak $n \geq 3$-tól igaz, akkor viszont szembesülhetünk vele, hogy $n = 3$-ra maga az állítás *nem igaz*, így indukciónk ismét nem indul el. Próbálkozzunk hát ennél nagyobb kezdő $n$ értékekkel: $n = 4$ még nem jó, $n = 5$ már jó lesz. Első nekifutásra ezen próbálkozások vezetnek el a fentebb részletezett, letisztult bizonyításhoz. Ne feledjük tehát: a teljes indukció működéséhez először is teljesülnie kell a kezdőlépésnek, másodszor is teljesülnie kell az $n \to n + 1$ lépésnek is.

## 1.2. Geometriai feladatok

**1.10. Feladat** ([2] 128. nyomán)**.** Mutassuk meg, hogy $n$ egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja fel!

*Megoldás.* Teljes indukcióval. 1. lépés: $n = 1$-re: 1 egyenes a síkot két részre osztja fel. Valóban: $\frac{1^2+1+2}{2} = 2$, az állítás igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz, vagyis $n$ darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja fel, ez az indukciós feltétel. Azt kellene belátnunk, hogy $n+1$ egyenes esetén a tartományok maximális száma

$$\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = \frac{n^2+2n+1+n+1+2}{2} = \frac{n^2+3n+4}{2}. \tag{1.5}$$

Feltéve, hogy már $n$ egyenes lent van a síkon, húzzuk be az $n+1$-edik egyenest! A legtöbb új tartomány akkor keletkezik, ha ez az egyenes minden korábbi egyenest metsz, és nem megy át korábbi metszésponton. Ekkor a korábbi egyenesek az $n+1$-edik egyenest $n$ pontban metszik, melyek a szóban forgó egyenest $n+1$ részre osztják. Minden ilyen szakasz, illetve félegyenes egy-egy új tartomány határoló szakasza/félegyenese, így $n+1$ db új tartomány keletkezik. Az indukciós feltétel szerint ekkor legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}+n+1$ részre osztottuk fel a síkot. Alakítsuk ezt a kifejezést:

$$\frac{n^2+n+2}{2}+n+1 = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+4}{2}.$$

Ez megegyezik az (1.5) kifejezéssel. Azt kaptuk, hogy az indukciós feltétel felhasználásával az állítás $n+1$-re is igaz, így a teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

**1.11. Feladat** ([2] 129. nyomán)**.** Mutassuk meg, hogy $n$ kör a síkot legfeljebb $n^2-n+2$ részre osztja fel!

*Megoldás.* Teljes indukcióval. 1. lépés: $n = 1$-re: 1 kör a síkot 2 részre osztja fel. Ekkor $1^2-1+2 = 2$, így az állítás igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n$-re, vagyis $n$ kör a síkot legfeljebb $n^2-n+2$ részre osztja fel, ez az indukciós feltétel. Azt kellene belátnunk, hogy $n+1$ kör a síkot legfeljebb

$$(n+1)^2-(n+1)+2 = n^2+2n+1-n-1+2 = n^2+n+2 \tag{1.6}$$

részre osztja fel. Feltéve, hogy már $n$ kör lent van a síkot, rajzoljuk meg az $n+1$-edik kört! A legtöbb új tartomány akkor keletkezik, ha ez a kör minden korábbi kört metsz, és nem megy át korábbi metszésponton. Az új kör minden korábbi kört két pontban metsz, így $2n$ darab új metszéspont, és ezáltal $2n$ új tartomány keletkezik. Az indukciós feltétel szerint ekkor legfeljebb $n^2-n+2+2n = n^2+n+2$ részre osztottuk fel a síkot. Ez éppen az (1.6) kifejezés. Azt kaptuk, hogy az indukciós feltétel felhasználásával az állítás $n+1$-re is igaz, így a teljes indukció elve értelmében az állítást beláttuk.

**1.12. Megjegyzés.** Halmazok közti kapcsolatot Venn-diagrammal ábrázolhatjuk. Legfeljebb három halmaz esetén a Venn-diagramot hagyományosan körök segítségével készítjük el. Miközben több halmaz esetében a Venn-diagram is nehezebben átlátható, felmerül a kérdés, hogy készíthető-e általában $n$ halmaz esetén csak körök használatával Venn-diagram? A Venn-diagram rajzolása során a cél, hogy – $n$ halmaz esetén – mind a $2^n$ lehetséges tartomány realizálódjon. Az 1.11. feladat segítségével válaszolhatunk arra a kérdésre, hogy meg tudjuk-e ezt tenni pusztánk körök használatával. $n = 1; 2; 3$ esetén tudjuk, hogy tudunk Venn-diagramot készíteni, és valóban: ebben a három esetben a maximális síktartományok száma az 1.11. feladat alapján rendre éppen 2; 4; 8. Kérdés, hogy lehet-e más pozitív $n$-re $2^n = n^2 - n + 2$. Mivel többszöri próbálkozásra sem sikerül csak körökkel Venn-diagramot készíteni már $n = 4$ halmaz esetén sem, ezért kialakul a sejtés, hogy ha $n \geq 4$ természetes szám, akkor

$$2^n > n^2 - n + 2. \tag{1.7}$$

Amennyiben ezt igazolni tudjuk, úgy azt bizonyítottuk, hogy legalább 4 halmaz esetén több tartománynak kellene lennie az ábrán, mint amennyi tartományt $n$ kör a síkon létre tud hozni, így $n \geq 4$ halmaz esetén csak körökkel Venn-diagram nem rajzolható.

Amennyiben $n \geq 5$, úgy az 1.8. feladatban már láttuk, hogy $2^n > n^2$, és $n^2 > n^2 - n + 2$, ha $n > 2$, vagyis ebben az esetben az (1.7) egyenlőtlenség igaz.

Már csak az $n = 4$ eset maradt: ekkor $2^4 = 16 > 14 = 4^2 - 4 + 2$, vagyis ebben az esetben sem tudunk körökkel elegendő mennyiségű tartományt előállítani.

Ezek szerint tehát lehet csak körökkel Venn-diagramot készíteni, ha a halmazok száma 1, 2 vagy 3 (és ezekre tudunk is példát mutatni), minden más esetben ez lehetetlen.

# Tárgymutató

# Irodalom

[1] Mahler Attila és Orosz Gyula. *Gyűjtemény a matematika emelt szintű oktatásához 11-12.* Oktatási Hivatal, 2022.

[2] Dr. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József és Szászné dr. Simon Judit. *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.* Oktatási Hivatal, 2022.

[3] Dr. Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József és Szászné dr. Simon Judit. *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Oktatási Hivatal, 2005.