

A mérés III.

Írta: dr. Majoros Mária

A matematika axiomatikus felépítésű. Természetesen az ismeretszerzés nem lehet axiomatikus felépítésű. De azt a kérdést joggal tehetjük fel, hogy léteznek-e a matematikai tapasztalatszerzésben – a cselekvés szintű megismerésben – olyan tevékenységek, amelyeket a matematikai fogalomalkotás szempontjából alapvetőnek kell tekintenünk. A tanítás gyakorlati síkjára lefordítva ez azt jelenti, hogy milyen tevékenységekből kiindulva tudjuk a matematikai fogalmakat felépíteni.

Egyszer az iskolában, ahol dolgozom, azt a pedagógiai elemzési feladatot kaptuk, hogy a saját tantárgyunkban a különböző témákat a tanítás során alkalmazott tevékenységekből kiindulva próbáljuk meg feldolgozni a következő táblázat alapján. Két téma általam elkészített vázlatos feldolgozását ismertetem:

5. osztály: Törtek

tanulói tevékenységi formák	kapcsolódó tartalom	kimeneti követelmény	felhasznált segédanyag	értékelés módja, eszköze, időpontja	a feladat teljesítésének szabályai
rajz, mérés	Törtek ábrázolása a számegegyenesen, nagyságrendi viszonyok eldöntése	biztos tájékozódás a számegegyenesen	Számegegyenes. Tankönyv, feladatlapok, feladatgyűjtemény	órai munka folyamatosan	önálló munka
mérés	Törtrész és egész rész számítása	helyes értelmezés		témazáró dolgozat	közös értelmezés, csoportmunka
számolás	Műveletek törtekkel	biztos számolás a racionális számkörben		témazáró dolgozat	önálló munka
átfogalmazások, következtetések, szöveg értelmezése és algebrai leírása	Nyitott mondatok törtekre, szöveges feladatok	A művelet fogalom helyes értelmezése és alkalmazása, biztos következtetések		órai munka folyamatosan. Témazáró dolgozat	közös értelmezés, csoportmunka
mérés, összehasonlítás	Törtek sokféle alakja, bővítés, egyszerűsítés, egész számok tört alakban, tizedes törtek és közönséges törtek kapcsolata	A tört értéke és alakja közötti kapcsolat helyes értelmezése		órai munka folyamatosan. Témazáró dolgozat	közös értelmezés, önálló munka
	Közönséges törtek átírása tizedes törtre, a helyi értékes jelölésmód szerepe	Biztos tájékozódás a helyi értékes jelölésben		órai munka folyamatosan, témazáró dolgozat	közös értelmezés, önálló alkalmazás

Mérés, darabolás, összehasonlítás	Tört fogalmának bevezetése, az egész számok tört alakja	Tört mennyiségek megadása		órai munka	közös értelmezés
--	---	---------------------------	--	------------	------------------

7. osztály: Egyenes és fordított arányosság, arányos következtetések

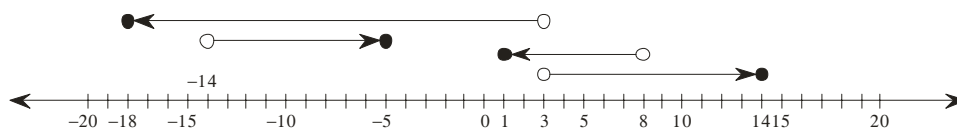
tanulói tevékenységi formák	kapcsolódó tartalom	kimeneti követelmény	felhasznált segédanyag	értékelés módja, eszköze, időpontja	a feladat teljesítésének szabályai
Rajzolás, mérés , számolás	A szabályos ötszög átlói az aranymetszés szabályainak felelnek meg		Hámori Miklós: Arányok és talányok		Házi feladat elkészítése, a megfelelő ábrák megrajzolása, és a mérések elvégzése.
mérés, összehasonlítás	Arányosság fogalma, egyenes és fordított arányosság	Az arány fogalmának biztos ismerete és alkalmazása	Tankönyv	Témazáró dolgozat	Órai munka, házi feladatok
szövegértelmezés	Gyakorlati feladatok megoldása	helyes értelmezés és alkalmazás	Tankönyv	Témazáró dolgozat	órai munka, házi feladatok
rajz, mérés , összehasonlítás	Összetett feladatok megoldása összehasonlítással	helyes értelmezés és alkalmazás	Bergengóc Példatár	Témazáró dolgozat	órai munka, házi feladatok
helyes értelmezés	Különböző feladathelyzetekben a megfelelő összefüggések felismerése	helyes értelmezés és alkalmazás		témazáró dolgozat	
olvasás, értelmezés	Nevezetes ókori problémák	a matematika történet ismerete	Lénárd Ferenc: A ráció üzenetei		otthoni olvasmány, beszámoló
mérés, összehasonlítás, az egység megválasztása	Arányossági feladatok megoldása méréssel, összehasonlítással egyenletek bevezetése nélkül	a feladathelyzet helyes értelmezése, és a megfelelő összefüggések feltárása, és matematikailag helyes megfogalmazása	tankönyv, versenyfeladatok gyűjteményei	Órai munka, témazáró dolgozat	Órai munka, házi feladatok

Ha megnézzük, akkor azt látjuk, hogy a mérés, összehasonlítás a leggyakrabban előforduló tevékenység. (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy teljesen ismeretlen területen járunk, mert a matematika tanítása szempontjából még az sem tisztázott, hogy egyáltalán mit is tekintünk tevékenységnek. Arra gondolok, hogy például – bizonyos értelemben – az absztrakció is tevékenység.)

Egy pillanatra visszautalnék az irracionális szám fogalmának létrejöttére. Az is a méréssel hozható kapcsolatba. A görögök jöttek arra rá, hogy ha meg tudják mérni a négyzet oldalát, akkor nem tudják megmondani az átló hosszát és fordítva, mert a két mennyiség összemérhetetlen.

A matematika tanítása során a matematikai fogalmakhoz próbálunk tevékenységeket és szemléltetéseket rendelni. Most fordítsuk meg ezt – tekintsük a mérést és az összehasonlítást – és nézzük meg milyen fogalmak és szemléletek kialakulását köthetjük ehhez a tevékenységhez.

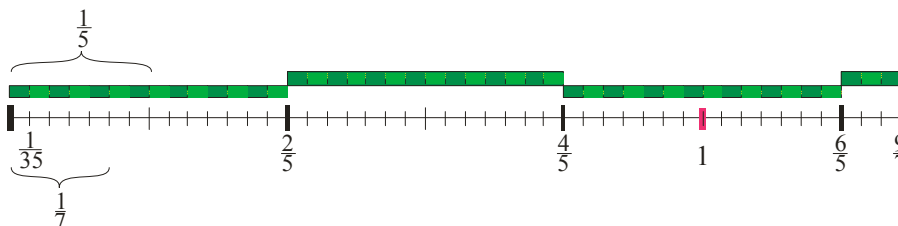
1. **Előjeles számok kivonása:** különbség (távolság) meghatározására vezethető vissza:



1. ábra

A számegyenesről leolvashatók a megoldások. Amikor a kivonás tulajdonságaihoz jó szemléletes képek rögzülnek, akkor a gyerekek maguktól fogják a számegyenest kidobni, és használják az absztrakt fogalmat.

2. **Törtök osztása:** az osztás minden esetben mérés, összehasonlítás. Az egész számok esetében ugyanúgy, mint a törtök esetében. Nézzünk egy konkrét példát: $\frac{9}{7} : \frac{2}{5}$. Az összemérhetőség miatt az egészet 35 egyenlő részre bontjuk.



2. ábra

A fenti szemléltetésből leolvasható a két tört összehasonlításának eredménye:

$$\frac{9}{7} : \frac{2}{5} = 3 + \frac{3}{14} = \frac{45}{14}$$

Általánosítsuk a megfigyelést, és nézzük meg, hogy két tört osztása esetén igazából miről is van szó:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Az összemérhetőség miatt az egészet $b \cdot d$ egyenlő részre osztjuk. Az $\frac{a}{b}$ törtet $a \cdot d$ egység fejezi ki, a $\frac{c}{d}$ törtet pedig $b \cdot c$ egység. Tehát $a \cdot d$ -re felmérjük $b \cdot c$ -t.

Mindkét szám $b \cdot d$ -edeket összeszámláló egész szám. Ennek az osztásnak az eredménye: $\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Tehát a korábban megalkotott osztásfogalomból tökéletesen levezethető a törtek osztására vonatkozó írásbeli szabály. Nagyon fontosnak tartom, hogy ebben a felépítésben nem az osztás fogalma változik, hanem a törtek írott alakjára keresünk egy műveletvégzési szabályt.

Úgy gondolom, hogy a tankönyvekben előforduló magyarázatok nem az osztás valódi tartalmára, hanem annak írásbeli elvégezhetőségére vonatkoznak. A törtek osztása az egyik legjobb példa arra, hogy a mérés és összehasonlítás bizonyos matematikai fogalmak esetén egy esszenciális szemléletbeli kérdés.

3. **Egyenletek.** A mérés különleges jelentőséggel bír az egyenletek tanítása szempontjából, mert az általános és középiskolában tanított szöveges egyenletek többsége arról szól, hogy egy ismeretlent úgy próbálunk meghatározni, hogy kétféle módon megmérjük, és a mérések eredményét összehasonlítjuk.

- a. Ókori babiloni feladat: *Az egyik területről négyzetméterenként $\frac{2}{3}$ kg búzát arattam. A másik földem minden négyzetméterén $\frac{1}{2}$ kg búza termett. A két terület terméshozama között a különbség 500 kg. A két földterület összesen 1800 m^2 . Hány négyzetméter a két földem külön-külön?* (A megoldás elolvasható Lévárdi László és Sain Márton „A ráció üzenetei” című könyvében.)

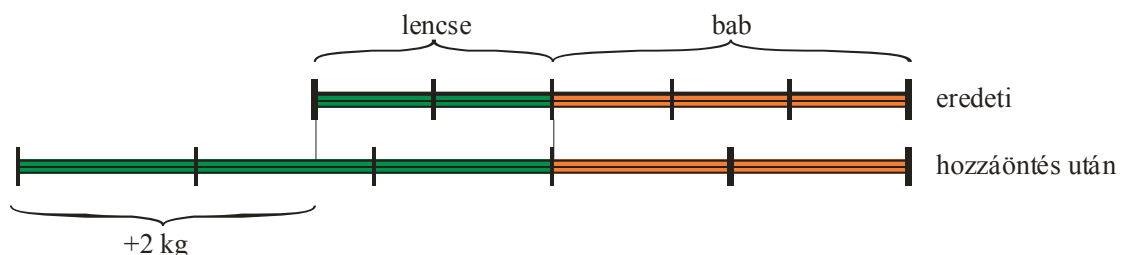
- b. *A nyuszinak 15 nyúlgrásnyi előnye van, amikor a kutya üldözőbe veszi. Két kutyaugrás akkora, mint három nyúlgrás. De amíg a kutya négyet ugrik, a nyuszi ötöt. Utoléri-e a kutya a nyuszt, és ha igen, hány ugrással?*

Egyenlettel nagyon bonyolultan, méréssel és összehasonlítással nagyon egyszerűen megoldható feladat. (Az itt ismertetett megoldás Bárány Judit 12 éves gyerektől származik.)

Ha a kutya 4 ugrásának ugyanannyi idő alatt a nyuszi 5 ugrása felel meg, akkor az ugrások hosszát is figyelembe véve ugyanannyi idő alatt a kutya 6 nyúlgrást teljesít, míg a nyuszi 5-öt. A kutyának 15 nyúlgrásnyi hátrányt kell ledolgoznia, ezt 15 időegység alatt teszi meg. Minden időegységben 4-et ugrik, így 60 ugrással éri utol a nyulat.

- c. *Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének az aránya 2:3 volt. Hamupipőke gonosz mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még két kilogramm lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi előtte a bab aránya volt a lencséhez.*

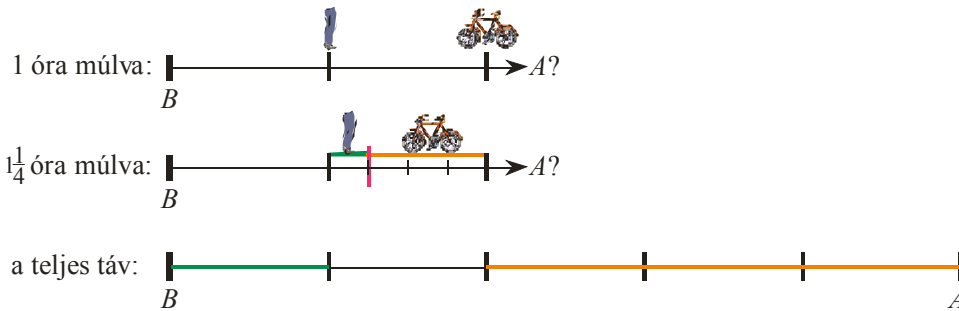
Végül hány kilogramm lencsét és, hány kilogramm babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?



3. ábra

A bab mennyisége eredetileg három egységnek felelt meg, a hozzáöntés után ugyanez a mennyiség csak két új egység. Ebből látjuk, hogy az új egység az eredeti egység másfélszerese. Így a 2 kilogramm lencse 2,5 eredeti egységnek felel meg. Egy eredeti egység tehát 0,8 kilogrammot szemléltet.

- d. *A és B városból egyszerre indul el egymással szemben egy kerékpáros és egy gyalogos. Egy óra múlva a gyalogos ugyanolyan messze lesz B-től mint a kerékpárostól. Negyed óra múlva találkoznak. Hány óra alatt teszi meg B-ből A-ba az utat? A kerékpáros hányszor akkora sebességgel halad? (Az itt ismertetett megoldás Dénes Máté 14 éves fiútól származik.)*

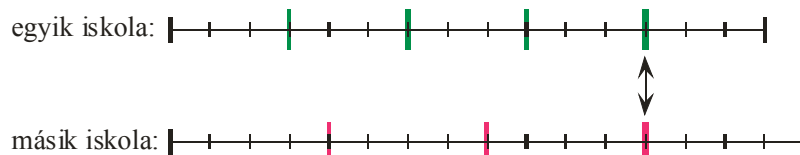


4. ábra

1 óra után a gyalogos ugyanolyan messze van B-től mint a kerékpárostól. Negyed óra múlva találkoznak. Ebben a negyed órában a kerékpáros és a gyalogos összesen a gyalogos egy órai útját tette meg, a kerékpáros tehát a háromnegyedét tette meg. Ebből következik, hogy a kerékpáros sebessége háromszor akkora, mint a gyalogosé. Tehát az első órában a kerékpáros a gyalogos útjának háromszorosát tette meg, így a gyalogosnak 5 órára van szüksége a két város közötti út megtételéhez.

- e. *Egy város 2 iskolájában 1240 gyerek tanul. Az egyik iskola tanulói számának négy ötöd része egyenlő a másik iskola tanulói számának három negyed részével. Hány gyerek jár az egyes iskolákba? (Az itt ismertetett megoldás Zelczer Tamás 13 éves fiútól származik.)*

Az első iskola tanulóinak létszámát 5 egyenlő részre bontjuk, és az egyenlő részekből 4-et veszünk. Ez a mennyiség egyenlő lesz azzal, ha a másik iskola tanulóinak létszámát 4 egyenlő részre bontjuk, és az egyenlő részekből 3-at veszünk. Az összemérhetőség miatt olyan beosztást kell keresni, ami egyszerre bontható 3 illetve 4 egyenlő részre.



5. ábra

$15 + 16 = 31$ egység, ami 1240-nek felel meg. \rightarrow 1 egység 40 gyereknek.

- f. Egy osztályban a tanulók 20%-ának van jelese matematikából. Ha kettővel kevesebb gyerek kapna jelest, akkor hatszor annyi gyereknek lenne jelestől különböző osztályzata. Hány gyerek jár az osztályba?

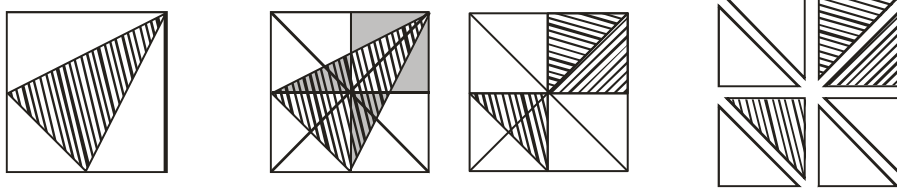
5-ször kettőből 2 hetedet lehet összerakni, tehát egy hetednek 5 gyerek felel meg. Így az osztálylétszám 35.

4. Átdarabolások: a tanítás során nagyon gyakran előforduló mérési helyzet. Csak négy példát említenék:

- a. A Pitagorasz- tétel bizonyítása (lásd pl.

http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/2004/08spec/8evf_int_index.html, 2005. január 5-ei szakkör: http://matek.fazekas.hu/portal/szakkorok/2004/08spec/8evf_fpi_11_2004_szakkor_ora_meg.pdf)

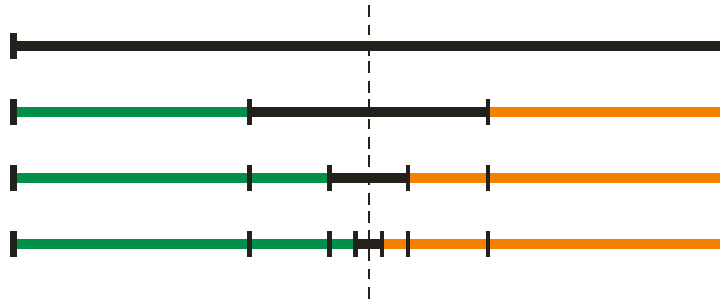
- b. Tötrészek meghatározása



6. ábra

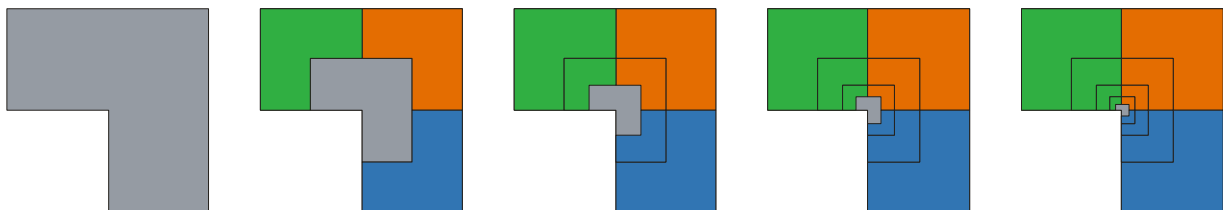
Az eredeti (bal oldali) ábrán a besatírozott tötrészen nem látszik jól, hogyan mérhető össze az egész négyzettel. Ezért célszerű az ábrát átdarabolni.

- c. Bizonyos végtelen sorok összegének meghatározása.



7. ábra

A 7. ábrán azt mutatjuk meg, hogy $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{2}$. Az eredetileg egységnyi hosszúságú fekete szakaszt mindig felosztjuk három egyenlő részre: egy zöldre, egy feketére és egy sárgára.



8. ábra

A 8. ábrán azt mutatjuk meg, hogy $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$. Az eredetileg egységnyi területű szürke alakzatot mindig felosztjuk négy egyenlő (területű) részre: egy zöldre, egy sárgára, egy kékre és egy szürkére (a megoldás Kenyeres Márton 14 éves fiútól származik).

d. Polinomok szorzása: erre az előző fejezetben hoztunk példát.

Amikor külföldi egyetemistákat tanítok matematikára, akkor általában nem kíváncsiak a matematikai összefüggések tartalmára. Azt kéri tőlem, hogy csak arra tanítsam meg őket, hogyan kell használni az adott kifejezést.

A matematika tanításában – mióta csak iskolában dolgozom – mindig jelen volt két irányzat harca. Az egyik az értelmes tanulást részesítette előnyben, ami időnként lassúbb haladást jelent, de a 12 iskolai év végén a gyerekek lényegesen többet tudnak, és bármilyen helyzetben tudják alkalmazni a megszerzett tudást.

A másik irányzat a pillanatnyi eredményességre törekszik, ezért kész algebrai megoldások tömegét zúdítja a gyerekekre azzal a céllal, hogy rövidtávon eredményes tudjon lenni. Ilyenkor előfordul, hogy bizonyos pillanatokban a külső szemlélő számára úgy tűnhet, hogy a gyerek értelmére kevésbé támaszkodó tanítási eljárások „eredményesebbek”, mert a gyerekek több algebrai kifejezéssel tudnak formálisan bánni. Hosszú távon ugyanakkor sokkal kisebb a hatékonysága.

Többször leírtuk, hogy a tanításban nincsenek univerzális igazságok. Mindig az adott gyereket vagy gyerekcsoportot kell fejlesztenünk úgy, hogy közben megfeleljünk egy olyan társadalmi elvárásnak is, hogy használható tudást adunk a gyerekeke kezébe. Mégis az értelem védelmében elmondanám, hogy az idő előtt kapott megoldási sémák (például egyenletek) a gyerekek értelmi fejlődését fogják vissza.

Irodalomjegyzék:

Lévárdi László-Sain Márton: A ráció üzenetei - Typotex, Budapest, 1993.

Andrásfai Béla: Versenymatek gyerekeknek – Calibra, Budapest

Kalmár László verseny feladatai 2007.

Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk?-Budapest, Calibra Kiadó, 1992.