Válogatás 40 év matematika felvételi feladataiból

RÁBAI IMRE

Cser Andor
matematikus, az OPI
tanszékvezetője emlékére

1. a) (Felvételi feladat) Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke 1, a másik egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Számítsa ki p és q értékét!

   b) (Rábai feladata) Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke 2, a másik gyöke egyenlő az egyenlet diszkriminánsával. Számítsa ki p és q értékét!

1.1 a) (Felvételi feladat) Egy háromszög két oldalának hossza 25 és 16, e két oldal által által bezárt szög szögfelezőjének hossza $2\sqrt{19}$. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldal hosszát!

   b) (Felvételi feladat) Egy háromszög két oldalának hossza 4, illetve 6, a közbezárt szög felezőjének hossza 3. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldal hosszát!

   c) (Rábai feladata) Egy háromszög két oldalának hossza 3, illetve 6, a közbezárt szög felezőjének hossza 2. Számítsa ki a két oldal által bezárt szöget és a harmadik oldal hosszát!

   d) (Rábai feladata) Egy háromszög két oldala a és b, a közbezárt szög felezője f_c. Igazolja, hogy a két oldal által bezárt szög pontosan akkor (akkor és csak akkor) 120°, ha $f_c = \dfrac{ab}{a+b}$! (f_c az a és b harmonikus közepének a fele.)

   A két oldal által közbezárt szög mikor 90°? $\left(f_c = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}.\right)$

2. a) (Felvételi feladat) Jelölje α, β és γ egy háromszög szögeinek mérőszámát. Bizonyítsa be, hogy ha

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

   akkor a háromszög derékszögű!

   b) (Felvételi feladat) Bizonyítsa be, hogy egy háromszög pontosan akkor (akkor és csak akkor) derékszögű, ha α, β és γ szögeire fennáll:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

   c) (Felvételi feladat) Jelölje egy háromszög oldalait rendre a, b és c, a köré írt kör sugarát pedig r. Igazolja, hogy a

$$K = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$$

   kifejezés **pontosan akkor** pozitív, nulla, illetve negatív, amikor a háromszög hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű!

   d) (Rábai feladata) A $K = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1$ kifejezés pontosan akkor („pakkor", „csakkor") negatív, nulla, illetve pozitív, amikor a háromszög hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű!

   e) (Rábai feladata) Indokolja, hogy a háromszög „pakkor" hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű, ha a $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$ kifejezés poztív, nulla, illetve negatív!

   f) (Rábai feladata) Igazolja a következő azonosságokat:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \equiv 1,$$
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \equiv 2,$$

   ahol α, β, γ egy háromszög szögei. ($\equiv$: azonosan egyenlő.)

3\. a) (Felvételi feladat) A p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - p^2x + pq = 0$ egyenlet gyökei is valósak, mégpedig az utóbbi egyenlet gyökei 1-gyel nagyobbak az előbbi egyenlet gyökeinél. Számítsa ki p és q értékét!

b) (Rábai feladata) A p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - 3p^2x + pq + 2 = 0$ egyenlet gyökei is valósak, mégpedig az utóbbi egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak az előbbi egyenlet gyökeinél. Számítsa ki p és q értékét!

c) (Rábai feladata) ... $x^2 + px - q = 0$ ... $x^2 - (p^2 + 4)x + 6 - pq = 0$ ... 3-mal ...

d) (Rábai feladata) ... $x^2 + 3px - \frac{4}{3} = 0$ ... $x^2 - p^2x - 2pq = 0$ ... 2-vel ...

[a) $p = 1, q \leq \frac{1}{4}$ vagy $p = -2, q = -1$.]

[b) $p = 1, q \leq \frac{1}{4}$ vagy $p = -\frac{4}{3}, q = -2$.]

[c) $p = 1, q \leq \frac{1}{4}$ vagy $p = -2, q = 3$.]

[d) $p = 1, q = 3$ vagy $p = -4, q = 3$.]

* * *

4.1 a) (Felvételi feladat) A k paraméter mely értékei mellett van az $x^2 - 2(3k + 5)x + k^2 + 13k - 80 = 0$ másodfokú egyenletnek két különböző előjelű valós gyöke?

b) (Rábai feladata) ... $x^2 - 2(3k + 2)x + k^2 + 11k - 102 = 0$ ...

c) (Rábai feladata) Ahhoz, hogy a valós együtthatós $x^2 + px + q = 0$ $(ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0)$ **pontosan** másodfokú egyenletnek ellenkező előjelű gyökei legyenek, szükséges és elégséges, hogy $q < 0$ $(ac < 0)$ teljesüljön.

d) (Felvételi feladat) Adja meg az α paraméter azon értékeit a $[0; 2\pi]$ intervallumban, amelyeknél a

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$$

egyenlet gyökei ellenkező előjelűek!

e) (Rábai feladata) ... $(2\sin\alpha + 1)x^2 - 4x + (4\sin\alpha - 2) = 0$ ...

4.2 a) (Felvételi feladat) Az $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - 2px - q = 0$ egyenleteknek van közös gyöke. Tudjuk, hogy $p^2 - 4q = 64$. Számítsa ki p és q értékét!

b) (Rábai feladata) ... $x^2 + 2px + 2q = 0$ ... $x^2 - 2px + 6q = 0$ ... $p^2 - 2q = 9$ ...

c) (Rábai feladata) ... Az $x^2 - px + q = 0$ egyenlet egyik gyökének kétszerese gyöke az $x^2 + 4px - 4q = 0$ egyenletnek, és $p^2 - 4q = 64$. Számítsa ki p és q értékét!

[a) $p = 8, q = 0$; $p = -8, q = 0$; $p = 4, q = -12$; $p = -4, q = -12$.]

[b) $p = 3, q = 0$; $p = -3, q = 0$; $p = 1, q = -4$; $p = -1, q = -4$.]

[c) $p = 8, q = 0$; $p = -8, q = 0$; $p = 4, q = -12$; $p = -4, q = -12$.]

* * *

d) (Rábai feladata) Igazolja, hogy ha az $f(x) = 0$ és a $g(x) = 0$ egyenleteknek x_0 közös gyöke, akkor x_0 gyöke az $Af(x) + Bg(x) = 0$ egyenletnek is! $(A, B \in \mathbb{R},\ A^2 + B^2 > 0.)$

e) (Rábai feladata) Igazolja, hogy ha az $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R},\ D = p^2 - 4q > 0)$ egyenlet egyik gyöke pontosan akkor (csakkor) kétszerese a másik gyöknek, ha
a) $2p^2 = 9q$; b) $9D = p^2$; c) $2D = q$!

5. a) (Érettségi feladat) A p valós paraméter mely értékeire lesz az $x^2 + px + 3 = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége 2?

b) (Felvételi feladat) Bizonyítsa be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenletnél a két gyök négyzetének különbsége [a különbség abszolút értéke] $\frac{c^2}{a^2}$-tel egyenlő, akkor $b^4 - c^4 = 4ab^2c$!

c) (Rábai feladata) Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - mx + m - 13 = 0$ egyenlet gyökei különbségének abszolút értéke
a) 7; b) $\sqrt{52}$; c) $4\sqrt{3}$; d) 6 legyen!

d) (Rábai feladata) Igazolja, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet valós gyökei különbségének abszolút értéke pontosan akkor k ($k \geq 0$), ha az egyenlet diszkriminánsa k^2!
(Hogyan szól az állítás az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet esetén?)

6. a) (Felvételi feladat) Oldja meg a

$$\sqrt{x - 4p + 16} = 2 \cdot \sqrt{x - 2p + 4} - \sqrt{x}$$

egyenletet, amelyben p valós paraméter!

b) (Rábai feladata) $\sqrt{x - a} + \sqrt{x} = 1$, ahol a valós paraméter.

c) (Rábai feladata) $\sqrt{x - 4a + 4} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x - 2a + 1}$, ahol a valós paraméter.

7. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) (Felvételi feladat) $\operatorname{tg} 2x + 3 \operatorname{ctg} x = 0$;

b) (Rábai feladata) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2x + 1$;

c) (Rábai feladata) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0$;

d) (T) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

8. a) (Felvételi feladat) Egy háromszög a, b, c oldalai között fennáll az

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

egyenlőség. Mekkora a b oldallal szemközti szög?
(Egyes esetekben a kérdés: Igazolja, hogy a b oldallal szemközti szög 60° [$\beta = 60°$]!
Kérdezhetnénk: Igazolja, hogy az egyenlőség pontosan akkor („pakkor", „csakkor"), ha $\beta = 60°$!)

b) (Felvételi feladat) Egy háromszög a, b, c oldalai között fennáll az

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a+b+c} = b^2$$

egyenlőség. Mekkora a b oldallal szemközti szög?
(Kérdezhetnénk: 1. Igazolja, hogy a b oldallal szemközti szög, $\beta = 60°$!
2. Igazolja, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\beta = 60°$!)

c) (Rábai feladata) ... $\beta = 60°$ pontosan akkor, ha

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-b} = \frac{3}{a-b+c} \text{ vagy } \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{3}{b-a-c}.$$

d) (Rábai feladata) ... $\beta = 60°$ pontosan akkor, ha

1. $b^2 = a^2 + c^2 - ac$;
2. $a(a^2 - b^2) = b(b^2 - c^2)$;
3. $\dfrac{c^2 - (a-b)^2}{ab} = 1$;
4. $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{ab} = 3$;
5. $c = \sqrt{\dfrac{a^3 + b^3}{a+b}}$.

A következő szögekre is hasonló (nem ennyire egyszerű) tételek írhatók fel (készülő példatáromban közlöm ezeket):
60°, 150°, 45°, 135°, 15°, 165°, 75°, 105°, 225°, ...

9. a) (Felvételi feladat) Az a valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy az $x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke van, és ez a négy gyök egy számtani sorozat négy egymást követő tagja?

b) (Felvételi feladat) ... $x^4 - (3a+5)x^2 + (a+1)^2 = 0$ ...

c) (Rábai feladata) ... $x^4 - (3a+2)x^2 + a^2 = 0$ ...

d) (Rábai feladata) ... $x^4 - (a+3)x^2 + 3a = 0$ ...

e) (Rábai feladata) Az $x^4 + px^2 + q = 0$ egyenlet gyökei valós számok. Igazolja, hogy az egyenlet gyökei pontosan akkor („pakkor", „csakkor") négy egymást követő tagja egy számtani sorozatnak, ha $9p^2 = 100q$!

* * *

10. (Felvételi feladat) Fejezzük ki lg 2 és lg 5 értékét p függvényeként, ha $\lg 2 \cdot \lg 5 = p$. (?)

* * *

11. a) (Felvételi feladat) Egy háromszög oldalainak hossza 13, 14, illetve 15. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a háromszög leghosszabb oldalán van, és ez a kör érinti a háromszög másik két oldalát?

b) (Rábai feladata) ... 11, 13, 20 ...

c) (Felvételi feladat) Egy háromszög súlyvonalainak hossza 3, 4, 5. Mekkora a háromszög területe?

d) (Rábai feladata) ... 2,4; 2,6; 1 ...

e) (Rábai feladata) Egy háromszög oldalainak hossza 4, 13, 15. Számítsa ki a háromszög területét, valamint beírható és körülírható körének sugarát!

f) (Rábai feladata) ... 6,8; 22,1; 25,5 ...

g) (Rábai feladata) ... 8,8; 28,6; 33 ...

h) (Rábai feladata) Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 22, a két szárának hossza 14,3, illetve 16,5, a trapéz magassága 13,2. Számítsa ki a trapéz területét!
[188,76 vagy 261,36 vagy 319,44 vagy 392,04.]

12. (Felvételi feladat) Egy mértani sorozat első eleme 8, a sorozat 21. eleme 1. Mekkora a sorozat második eleme?
[$q = \sqrt[20]{0{,}125}$, $a_2 = 8q$, $a_2 \approx 7{,}2096$] (? $q =$?)

13. a) (Felvételi feladat) Egy egységsugarú kör érinti egy derékszög két szárát. Mekkora a sugara azoknak a köröknek, melyek a derékszög két szárát és az adott kört is érintik?

b) (Felvételi feladat) Egy k kör érinti az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ egyenletű kört és a koordinátatengelyeket. Mekkora a kör sugara?

c) (Rábai feladata) Egy k kör érinti az $x^2 + y^2 = 10x$ egyenletű kört és a koordinátatengelyeket. Írja fel a kör egyenletét!

14. Igazolja, hogy ha egy háromszög oldalainak hossza a, b és c, az oldalakkal szemközti szögeinek nagysága α, β és γ, akkor

a) (Felvételi feladat) $b^3c\cos\alpha + c^3a\cos\beta + a^3b\cos\gamma = bc^3\cos\alpha + ca^3\cos\beta + ab^3\cos\gamma$;

b) (Rábai feladata) $\dfrac{b^2-c^2}{a}\cos\alpha + \dfrac{c^2-a^2}{b}\cos\beta + \dfrac{a^2-b^2}{c}\cos\gamma = 0$;

c) (Rábai feladata) $\left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right)\cos\beta + \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3$;

d) (Felvételi feladat) $\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$;

e) (Rábai feladata) 1) $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$; 2) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$; 3) $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(Az 1) és a 2) az ún. Mollweide-formulák, a 3) a tangenstétel. Az 1) és a 2) szorzata a d), volt felvételi feladat, az 1) és a 2) hányadosa a 3), a tangenstétel.)

f) (Rábai feladata) $a(\sin\beta - \sin\gamma) + b(\sin\gamma - \sin\alpha) + c(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$;

g) (Rábai feladata) $a\sin(\beta-\gamma) + b\sin(\gamma-\alpha) + c\sin(\alpha-\beta) = 0$;

h) (Rábai feladata) $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$;

i) $\dfrac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\gamma$; $\quad\dfrac{c}{a} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\beta + \cos\beta$.

$\vdots$

15. a) (Felvételi feladat) Egy trapézt a két átlója négy háromszögre bont. A párhuzamos oldalakon nyugvó háromszögek területe T, illetve t területegység. Fejezze ki a trapéz területét T, illetve t segítségével! $\left[\left(\sqrt{T} + \sqrt{t}\right)^2\right]$

b) (Rábai feladata) Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja K. Az ABK, BCK, CDK és DAK háromszögek területe rendre t_1, t_2, t_3 és t_4. Igazolja, hogy a négyszög AB és DC oldalai pontosan akkor párhuzamosak, ha a négyszög T területe $T = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3}\right)^2$.

c) (Felvételi feladat) Jelölje K az ABC háromszög A-hoz közelebb eső harmadolópontját, L pedig a BC oldal B-hez közelebb eső harmadolópontját, Q pedig az AL és CK szakaszok metszéspontját. Hányad része az ABC háromszög területének az AQB és a BQC háromszögek területe, és milyen arányban osztja a Q pont az AL, illetve a CK szakaszt?

d) (Rábai feladata) Az ABC háromszög AB oldalán levő K, a BC oldalán levő L pontokra $3AK = KB$, illetve $BL = LC$. Az AL és a CK szakaszok metszéspontja Q.
1) Hányad része az ABC háromszög területének az AQB, illetve a BQC háromszög területe?
2) Milyen arányban osztja a Q pont az AL, illetve a CK szakaszt?

e) (Felvételi feladat) Messe az ABC háromszög BC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldalt D, az AC oldalt E pontban! Jelöljük M-mel a BC oldal tetszés szerinti pontját! tudjuk, hogy az ABC háromszög területe T, az ADE háromszög területe pedig t. Mekkora az $ADME$ négyszög területe?

16. a) (Felvételi feladat) Mutassuk meg, hogy van olyan számtani sorozat, amelyben az első n elem összege $\frac{n^2}{4} - n$ (minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén). Írja fel a sorozat első 5 elemét!

b) (Rábai feladata) ... $S_n = n^2 + 4n$ ... $a_1 = ?$ $d = ?$

c) (Felvételi feladat) Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ számtani sorozat. Igazolja, hogy a $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ képlettel értelmezett $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ sorozat is számtani sorozat!

d) (Rábai feladata) ... $b_n = a_{n+2}^2 - a_n^2$ ...

e) (Felvételi feladat) Adott a d differenciájú (a_n) számtani sorozat. A sorozathoz található olyan p és q valós szám, hogy minden 1-nél nagyobb n természetes szám esetén $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$.
Határozza meg p és q lehetséges értékeit, ha (a_n)
1) nem állandó sorozat;
2) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 \neq 0$;
3) olyan állandó sorozat, amelyben $a_1 = 0$.

f) (Rábai feladata) ... $a_{n+1} = 2pa_n - 2qa_{n-1}$ ...

g) (Rábai feladata) ... $a_{n+1} = 2pa_n - qa_{n-1}$ ...
[„Mikor mennyies és mikor hányszoros egy léptetés?"]

17. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenletrendszereket!

a) (Felvételi feladat) $\sin x + \cos y = 0$, $\quad \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}$;

b) (Rábai feladata) $\sin x + \cos y = 0$, $\quad \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{4}$;

c) (Felvételi feladat) $4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y$, $\quad \cos 2x = 0$;

d) (Rábai feladata) $4 \sin^2 x + 4 \cos x + 6\sqrt{2} \sin y + 5 = 0$, $\quad \cos 2y = 0$;

e) (Felvételi feladat) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 2$, $\quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2$;

f) (Rábai feladata) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$, $\quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 2$;

g) (Felvételi feladat) $\sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y$, $\quad - \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y = 0$;

h) (Rábai feladata) $2 \sin^3 x = \cos y$, $\quad 2 \cos^3 x = \sin y$;

i) (Rábai feladata) $\cos y = \sqrt{2} \cos x$, $\quad \sin y = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin x$;

j) (Rábai feladata) $x + y = \frac{2\pi}{3}$, $\quad \sin x = 2 \sin y$.
(Kielégíti-e az $x = \frac{5\pi}{2}$, $y = -2\pi$ értékpár a $\sin x + \cos y = 2$ egyenletet? Adjuk meg az egyenlet összes megoldását!)

40 év matematika felvételi feladatainak tanulságai, hatása a középiskolai oktatásra

1. Legyen-e egy feladat „preparált"?
2. Egy feladatból – sok feladat!
3. Ez a feladat – (és mindig ez) – a világ majdnem minden példatárában (véges számú kivétellel) megtalálható.
4. Feladathoz egyszerű tétel – tételhez feladat!
5. Egy másodfokú egyenlet gyökeinek különbsége.
6. Tanítsunk egyszerűbb feladatokon keresztül!
   (Paraméteres gyökös egyenlet.)
7. $(n-1)$-edszer a szűkítő azonosságokról.
8. Két klasszikus (és felvételi) feladat és a rokonfeladatok.
9. A négy különböző gyök egy számtani sorozat négy egymást követő tagja!
10. Mi itt a kérdés? (Mi történt a felvételi dolgozatokkal 1973-ban?)
11. A háromszög oldalainak hossza és a háromszög területe is egész szám! (Heron-háromszögek.)
12. Mi legyen a hibák sorsa?
13. Néhány problémás feladat.
    a) Mi történhet, ha egy geometriai számítási feladatból koordinátageometriai feladatot konstruálunk?
    b) Egy rehabilitált feladat.
14. Minden háromszögben igaz!
15. Területek, részterületek!
16. Mikor számtani egy sorozat?
17. A „legpechesebb tananyagrész".
    (Volt egyszer egy felmérő dolgozat.)
18. Kétismeretlenes egyenletek.
19. Mit tanítsunk az egyenletrendszerekről?
20. Meghatározott? Túlhatározott? Alulhatározott?
21. 1001 megfordítható állítás a középiskolai matematika oktatásában.
22. Néhány kérdés:
    a) Mikor egyenes egy gúla?
    b) Mit jelent az, hogy a függvény grafikonját pozitív irányba eltoljuk az x tengely mentén?
    ($f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = (x-1)^2 + 5$.)
    c) Igaz-e, hogy közelít hozzá, de soha el nem éri?

I.1. **a)** $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$; **b)** $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$;

c) $-\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$; **d)** $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.

[a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \dots$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + \dots$;

c) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \dots$, $x_2 = \pi + \dots$; d) $x_1 = 2k\pi + \dots$, $x_2 = \frac{4\pi}{3} + \dots$]

2. **a)** $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3} - \cos x}{1 + \sin x}$; **b)** $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3} + \cos x}{1 - \sin x}$;

c) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3} - \sin x}{1 + \cos x}$; **d)** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3} + \sin x}{1 - \cos x}$.

[a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \dots$; b) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + \dots$; c) $x_1 = \frac{\pi}{3} + \dots$; d) $x_1 = \frac{4\pi}{3} + \dots$]

3. **a)** $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$; **b)** $-\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$;

c) $-\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$; **d)** $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

[a) $x_1 = \frac{11\pi}{6} + \dots$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \dots$; b) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + \dots$, $x_2 = \frac{3\pi}{2} + \dots$;

c) $x_1 = \frac{5\pi}{3} + \dots$, $x_2 = \pi + \dots$; d) $x_1 = 2k\pi + \dots$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + \dots$]

4. **a)** $\operatorname{tg} x = \frac{\cos x - \sqrt{3}}{1 - \sin x}$; **b)** $\operatorname{tg} x = \frac{-\cos x - \sqrt{3}}{1 + \sin x}$;

c) $\operatorname{ctg} x = \frac{-\sin x - \sqrt{3}}{1 + \cancel{\sin} x}$; cos x **d)** $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3} - \sin x}{-1 + \cos x}$.

[a) $x_1 = \frac{11\pi}{6} + \dots$; b) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + \dots$; c) $x_1 = \frac{5\pi}{3} + \dots$; d) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + \dots$]

II.1. Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese, továbbá
a) $2BC = 3AC$; **b)** $2BC = 3AC$; **c)** $6AB = 5BC$; **d)** $5AC = 4AB$.
A háromszög területének mérőszáma a C csúcsnál levő szög szinuszának
a) 27-szerese; **b)** 12-szerese; **c)** 48-szorosa; **d)** 75-szöröse.
Számítsa ki a háromszög oldalait!

[a) (9; 6; 7,5); b) (6; 4; 5); c) (12; 8; 10); d) (15; 10; 12,5).]

2. Számítsa ki az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben a, b és c értékét, ha az egyenlet egyik gyöke

a) $x_1 = 3$,	továbbá	**a)** $ac = 3$	és	**a)** $a + b + c = 0$;
b) $x_1 = 4$,		**b)** $ac = -4$		**b)** $a - b + c = 0$;
c) $x_1 = -4$,		**c)** $ac = -8$		**c)** $4a + 2b + c = 0$;
d) $x_1 = 5$,		**d)** $ac = -10$		**d)** $4a - 2b + c = 0$.

[(a, b, c): a) (1; −4; 3) vagy (−1; 4; 3); b) (1; −3; −4) vagy (−1; 3; 4); c) (1; 2; −8) vagy (−1; −2; 8); d) (1; −3; −10) vagy (−1; 3; 10).]

3. Tekintsük a következő függvényeket:

a) $f_1\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(x),\quad f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

b) $f_2\colon \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_2(x),\quad f_2(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$;

c) $f_3\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_3(x),\quad f_3(x) = -\dfrac{x+2}{x+1}$;

d) $f_4\colon \mathbb{R}\setminus\{-2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_4(x),\quad f_4(x) = -\dfrac{2x+5}{x+2}$.

Igazolja, hogy a függvényeknek van inverzfüggvénye, és határozza is meg azokat!

[Mindegyik függvény kölcsönösen egyértelmű (bijektív). Mindegyik függvény inverze önmaga (!). Miért?]

4. Az **a)** $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 + 3px - q = 0$,
b) $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 + 2px - q = 0$,
c) $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - 2px - q = 0$,
d) $x^2 + px + q = 0$ és az $x^2 - 5px - q = 0$

egyenleteknek van közös gyöke és

a) $p^2 - 4q = 9$; **b)** $p^2 - 4q = 16$; **c)** $p^2 + q = 1$; **d)** $25p^2 + 4q = 1$.

Számítsa ki p és q értékét!

[a) $q = 0$ és $p = \pm 3$ vagy $q = -2$ és $p = \pm 1$; b) $q = 0$ és $p = \pm 4$ vagy $q = -3$ és $p = \pm 2$;

c) $q = 0$ és $p = \pm 4$ vagy $q = -3$ és $p = \pm 2$; d) $q = 0$ és $p = \pm\frac{1}{5}$ vagy $q = -6$ és $p = \pm 1$.]

5. Határozza meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenség minden valós x-re teljesüljön.

a) $x^2 + 1 + a^2 > 0$;

b) $ax^2 + 4 > 0$;

c) $ax^2 - 4 > 0$;

d) $ax^2 + 2 - a > 0$.

[a) $\forall a \in \mathbb{R}$; b) $a > 0$; c) egyetlen a-ra sem; d) $0 < a < 2$.]

6. Igazolja, hogy ha egy háromszög oldalainak hossza a, b és c, akkor a b oldallal szemközti szög pontosan akkor (akkor és csak akkor)

a) 30°, **b)** 45°, **c)** 150°, **d)** 135°, ha

[a) $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{3}ac$; b) $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$; c) $a^2 + c^2 = b^2 - \sqrt{3}ac$; d) $a^2 + c^2 = b^2 - \sqrt{2}ac$.]

2007 novembere

Rábai Imre

KÉTISMERETLENES EGYENLETEK

SZÉP JENŐ
tanár úr emlékére

RÁBAI IMRE

I.

1. Egy háromszög területe $T = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, ahol a és b a háromszög két oldalának a hossza. Számítsa ki a háromszög szögeit! — Rábai próbafelvételi 1978.

Oldja meg a valós számpárok (számhármasok) halmazán a következő egyenleteket (egyenletrendszereket)!

2. $x + \frac{1}{x} = 2\cos y$ — Felvételi feladat 1972.

3. $x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$ — Felvételi feladat 1978.

4. $2\cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}$ — Felvételi feladat 1978.

5. $\log_2\left(\sin^2 xy + \frac{1}{\sin^2 xy}\right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}$ — Felvételi feladat 1991.

6. $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2xy &= z^2 + 4 \end{aligned}\right\}$ $(x, y, z) = ?$ — Felvételi feladat 1991.

7. $\left.\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y - \cos^2 z &= -2 \end{aligned}\right\}$ $(x, y, z) = ?$ — Felvételi feladat 1977.

8. $4\cos^2 x - 4\sin x \sin y - 5 = 0$ — Próbafelvételi 2000.

9. $(\sin(x - y) + 1) \cdot (2\cos(2x - y) + 1) = 6$ — Felvételi feladat 1996.

10. $\cos 2x + (2\cos y - 1)\sin x + \cos y - 1 = 0$ — Felvételi feladat 1998.

11. $16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0$ — Emelt szintű próbaérettségi 2003.

12. $\frac{x^3y + xy^3}{\sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{4 - y^2}} = \frac{4xy}{\sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 4)}}$ — Felvételi feladat 1995.

13. **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = 2y^2 - 4y + 3$ — Rábai próbafelvételi

b) $(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}(y^2 + 2y + 2)$ — Próbafelvételi, Kömal 2003. dec. (Szlovák Sándorné)

14. $\operatorname{tg}^2 x + 2(\sin y + \cos y)\operatorname{tg} x + 2 = 0$ — Rábai próbafelvételi 2001.

15. $\left(\frac{1}{2} + \sin x\right)^2 + \left(y^2 + \cos x\right)^2 = 0$ — Emelt szintű próbaérettségi, Kömal 2004/6 (Számadó László)

II.
GYAKORLÓ FELADATOK

1. $(4x^2 - y^2)^2 + (x+1)^2 = 0$

2. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 3$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

3. a) $xy = 0$

b) $xy + x - 2y = 2$

4. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{1+y^2}$

b) $x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{1+y^2}$

5. a) $x^2 + y^2 = 0$

b) $ax + by = 0$

c) $ax + by = c$

6. a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$

c) $a^2x^2 - b^2y^2 = c^2$

d) $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$

7. a) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x} \qquad (x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.)$

b) $x^{\sqrt{\log_x y}} = y^{\sqrt{\log_y x}} \qquad (x > 1,\ y > 1 \text{ vagy } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.)$

8. $\left(s(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}; \qquad c(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)$

a) $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$

b) $c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$

9. a) $x + |x| = y + |y|$

b) $|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}$

c) $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 16$

d) $|xy| + y|y| = \frac{y}{|x|} + 1$

III.
AZONOSSÁGOKBÓL ADÓDÓ EGYENLETEK
NEM EGYENLŐ! NEM AZONOS?

1. a) $x^2 = y^2$

b) $x^3 = y^3$

2. a) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

b) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x}\sqrt{-y}$

3. a) $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$

b) $\log_2 xy = \log_2(-x) + \log_2(-y)$

4. a) $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$

b) $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

c) $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$

5. a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

b) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$

c) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$

c) $(x - y)^3 = x^3 - y^3$

IV.
Tanult állítások

1. a) $\sin x = \sin y$

b) $\sin x + \sin y = 0$

c) $\cos x = \cos y$

d) $\cos x + \cos y = 0$

e) $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, y$

f) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = 0$

2. a) $a^x = a^y$ $(a > 0)$

b) $\log_a x = \log_a y$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0.)$

V.
Néhány feladatvariáns

A világ majdnem minden példatárában és a magyar felvételi feladatok között is megtalálható.

1. a) $x + y + z = 1$
$2xy - z^2 = 4$ — Felvételi feladat 1991.

Variánsok

b) $x + y + z = 1$
$2xy - z^2 = 1$

c) $x + y + z = 4$
$2xy - z^2 = 16$

d) $x + y + z = -3$
$2xy - z^2 = 9$

2. a) $x + \frac{1}{x} = 2\cos y$ — Felvételi feladat 1972.

Variánsok

b) $x + \frac{1}{x} = 2\sin y$ **c)** $x + \frac{1}{x} = -2\cos y$ **d)** $x + \frac{4}{x} = 4\sin y$

e) $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{1+y^2}$ **f)** $x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{1+y^2}$ **g)** $x + \frac{4}{x} = -\frac{4}{1+y^2}$

3. a) $x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$ — Felvételi feladat 1988.

Variánsok

b) $x^2 - 2x\cos xy + 1 = 0$

c) $x^2 + 4x\sin xy + 4 = 0$

d) $x^2 - 6x\cos xy + 9 = 0$

4. a) $3^x + 3^{-x} = 2\cos^2 \frac{x^2+3y}{6}$ — Felvételi feladat 1988.

Variánsok

b) $2^x + 2^{-x} = 2\sin^2 \frac{x^2+2y}{4}$

c) $4^{2x} + 4^{-2x} = 2\cos^2 \frac{x^2+y}{2}$

d) $2^{x+1} + 2^{1-x} = 4\sin^2 \frac{x^2+4y}{2}$

I.

Kétismeretlenes egyenletekkel találkozunk:

a) A sík koordinátageometriája. (Másodrendű görbék)

b) Egyváltozós implicit függvények. ($F(x;\ y) = 0$)

c) Közönséges differenciálegyenletek megoldása. ($g(y)y' = f(x) \Longleftrightarrow G(y) = F(x) + c$)

d) Kétváltozós függvények szintvonalai. ($f(x;\ y) = c$)

(Számelmélet: Kétismeretlenes diofantikus egyenletek)

e) Kétváltozós azonosságok.

f) Rossz azonosságok. ($\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Longleftrightarrow a \geq 0,\ b = 0$ vagy $a = 0,\ b \geq 0.$)

II.

Megoldási módszerek, tanácsok

a) Az egyik ismeretlent tekintsük paraméternek.

b) Egyszerű tételek alkalmazása. (Például $A^2 + B^2 = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ és $B = 0.$)

c) Függvénytulajdonság alkalmazás. ($f(x;\ y) = g(x;\ y)$ és $f(x;\ y) \geq K$, $g(x;\ y) \leq K$ ($k \in \mathbb{R}$) esetén csak olyan megoldás lehet, ahol $f(x;\ y) = K$ és $g(x;\ y) = K$.)

Természetesen a feladatok egyediek, így más egyedi módszerek is alkalmazhatók.

A KÖMAL 2003/6 mellékletében található emelt szintű próbaérettségi:

$$16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0$$

egyenlet két „különböző" megoldása csak egy megoldás két változata.

(1. $D \geq 0$, $\cos^2 y \geq 1$, $|\cos y| = 1, \ldots$

2. Megoldóképlet: $x = \dfrac{\cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}}{4}$, $\sin y = 0$, $|\cos y| = 1, \ldots$)

Itt is alkalmazható a b) és a c) módszer:

b) $(4x - \cos y)^2 + \sin^2 y = 0 \Longleftrightarrow \sin y = 0$ és $x = \dfrac{1}{4}\cos y, \ldots$

c) $x = 0$ nem lehet megoldás, ... $16x + \dfrac{1}{x} = 8\cos y$;

ha $x > 0$, akkor $16x + \dfrac{1}{x} \geq 2\sqrt{16} = 8$;

ha $x < 0$, akkor $16x + \dfrac{1}{x} \leq -8$ és $-8 \leq \cos y \leq 8$.

Tehát $x > 0$, $16x = \dfrac{1}{x}$, $x = \dfrac{1}{4}$, $\cos y = 1, \ldots$;

$x < 0$, $16x = \dfrac{1}{x}$, $x = -\dfrac{1}{4}$, $\cos y = -1, \ldots$;

NÉHÁNY EGYENLET MEGOLDÁSA

1. $Ax + By = 0$ ($A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longleftrightarrow x = Bt,\ y = -At,\ t \in \mathbb{R}$.)

2. $Ax + By + C = 0$ ($A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longleftrightarrow x = Bt,\ y = \dfrac{C}{B} - At,\ t \in \mathbb{R}$.)

3. $x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

(Igaz-e? $x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ t \in \mathbb{R}$.)

4. $\dfrac{x^3 + y^3}{x - y} = x^2 - y^2 \Longleftrightarrow x = t,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y = 0$ vagy $x = -2t,\ y = t,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(„Rossz egyenlet"?)

5. $(x^2 + 2x + 3)(y^2 - 4y + 8) = 8 \Longleftrightarrow \underbrace{((x+1)^2 + 2)}_{\geq 2}\underbrace{((y-2)^2 + 4)}_{\geq 4} = 8 \Longleftrightarrow x = -1,\ y = 2.$,

6. $(1 + \sin x)(2\cos y + 1) \Longleftrightarrow \sin x = 1$ és $\cos y = 1 \Longleftrightarrow \ldots$