MI LEGYEN AZ ELŐADÁS CÍME?

RÁBAI IMRE

RIEGER RICHÁRD
tanár úr emlékére

I. Egy „szép" érettségi-felvételi feladat és „testvérei", valamint a további „rokonok"!

II. Melyik a feladatok „ősfeladata"?

III. Egy „szép" ciklikus (eredményében szimmetrikus) feladat és ami mögötte van!

IV. Egy „szép" érettségi-felvételi feladat, egy Pólya György feladat és egy KöMaL feladat közös megoldási módszere!

* * *

I. Érettségi-felvételi feladat (1984)

1. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β, illetve γ, akkor $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°) = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta + 60°)$.

2. (Rábai feladatai)

a) $a^2 + b^2 - \sqrt{2} \cdot ab\cos(\gamma + 45°) = \ldots = \ldots;$

b) $a^2 + b^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot ab\cos(\gamma + 30°) = \ldots = \ldots;$

c) Határozza meg k_1, k_2, k_3 és k_4 értéket, hogy hasonló egyenletek legyenek érvényben 15°, 22,5°, 67,5°, illetve 75° esetén, azaz

c_1) $a^2 + b^2 - k_1 ab\cos(\gamma + 15°) = \ldots$

c_2) $a^2 + b^2 - k_2 ab\cos(\gamma + 22{,}5°) = \ldots$

c_3) $a^2 + b^2 - k_3 ab\cos(\gamma + 67{,}5°) = \ldots$

c_4) $a^2 + b^2 - k_4 ab\cos(\gamma + 75°) = \ldots$

[E feladatok közül egyeseket a KöMaL-ban feladtam.]

3. Lássa be, hogy tetszőleges φ szög esetén

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{\cos\varphi} \cdot ab\cos(\gamma + \varphi) = b^2 + c^2 - \frac{1}{\cos\varphi} \cdot ab\cos(\alpha + \varphi) = \ldots$$

II. „Ősfeladatként" az elemi matematika irodalmában a következő feladattal találkoztam:

Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, a velük szemközti szögek pedig rendre α, β, illetve γ, akkor

1. $$a^2 + ab \cdot \frac{\sin\left(\gamma - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}} = c^2 + cb \cdot \frac{\sin\left(\alpha - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}};$$

2. $$b^2 + bc \cdot \frac{\sin\left(\alpha - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}} = a^2 + ac \cdot \frac{\sin\left(\beta - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}};$$

3. $$c^2 + ca \cdot \frac{\sin\left(\beta - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}} = b^2 + ba \cdot \frac{\sin\left(\gamma - \frac{180°}{n}\right)}{\sin\frac{180°}{n}},$$

ahol $n = 2, 3, 4, \ldots$

„Ősfeladatnak" azért nevezem, mert ha a II.1. feladatban az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk b^2-et, és n helyébe 3-at írunk, akkor az I.1. feladatot kapjuk.

4. Hogyan kaphatjuk a II.1. feladatból az I.2.a,b feladatokat?

III. A KöMaL 2006/5 számában (a 294. oldalon) kitűzött C. 859. feladat a következő:

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben:

$c^2 + 2ab\sin(\gamma + 30°) = b^2 + 2ac\sin(\beta + 30°) = a^2 + 2bc\sin(\alpha + 30°)$.

[Mindhárom kifejezés $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}T$-vel egyenlő, ahol T a háromszög területe.]

2. Írjon fel hasonló állításokat!

a) $c^2 + k_1 ab\sin(\gamma + 60°) = \ldots = \ldots$

b) $c^2 + k_2 ab\sin(\gamma + 45°) = \ldots = \ldots$

c) $c^2 + k_3 ab\sin(\gamma + \varphi) = \ldots = \ldots$

esetén! [a) $k_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$; b) $k_2 = \sqrt{2}$; c) $k_3 = \frac{1}{\sin\varphi}$. (Belátható, hogy c) esetén $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + (\operatorname{ctg}\varphi)\cdot 2T$-vel egyenlők a kifejezések.)]

3. Igazolja, majd írja fel a többit is!

a) $c^2 + 2ab\cos(\gamma - 60°) = \ldots$ b) $\ldots$, c) $\ldots$, d) $c^2 + \frac{1}{\sin\varphi}ab\cos(\gamma + \varphi - 90°) = \ldots$

IV. Pólya György a *Problémamegoldás iskolája* című könyve II. kötet (40. o.) 8.4 feladata a következő:

1. Szerkesszünk adott (tetszőleges) háromszög oldalai fölé – az eredeti háromszög külsején fekvő – egyenlő oldalú háromszögeket. Kössük össze a szerkesztett háromszögek súlypontjait. Mutassuk meg, hogy az így keletkezett háromszög egyenlő oldalú!

Ha a háromszög oldalait x, y, illetve z-vel jelöljük, akkor

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°);$$
$$3y^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta + 60°);$$
$$3z^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°),$$

így

$$6x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}T_x = 6y^2 = 6z^2.$$

Befejezésül még egy volt érettségi-felvételi feladat.

2. Rajzoljon az a, b, c oldalú háromszög oldalaira kifelé rendre egy a, b, illetve c oldalú négyzetet. A négyzeteknek a háromszögekre nem illeszkedő csúcsai egy hatszöget határoznak meg. E hatszögnek azokat az oldalait, amelyek nem négyzetoldalak, jelölje x, y és z. Bizonyítsa be, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

VARGA TAMÁS
módszertani napok
2009. november

REMÉNYI GUSZTÁV
tanár úr
emlékére

Rábai Imre

Én most csak kérdezek.

Beszéljük meg!

(Középiskolában tanító matematikatanároknak)
((No azért egy kis elemi matematikai „meglepetés" is lesz. Hátha valaki nem ismeri.))

Előkérdések: 1. Mi az a menteléki hajtalékdad?
2. …

I. Bevezető kérdések

1. Kik írták a Gallai Tibor–Péter Rózsa tankönyvsorozat egyes tankönyveit?
2. a) Végtelen sok intervallumnak **van** közös pontja? Mikor van pontosan egy?

   b) Milyen ábrát készítene a tankönyvben az $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ függvény grafikonjaként?

(Mindkét kérdés a IV. osztályos tankönyvhöz kapcsolódik.)

3. Az egyenes egy irányvektora.
   Jó elnevezés? (Állásvektor?)

II. További kérdések

4. Az ismert definícióval ekvivalens-e a következő?

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0 \\ -a, & \text{ha } a \le 0 \end{cases}$$

(Alkalmazta már?)

5. Mikor egyenes egy gúla?
6. Mióta **nulla** a null, a zérus, a zéró, a ciffra? (Eltűnő, el nem tűnő. Hallották valaha?)
7. Miért nem jelöljük egységesen?

(ρ, r, R. A háromszögbe, illetve köré írt kör sugara.)

8. Lineáris (?) függvénytranszformáció.

Mit jelent az x (y) tengely mentén eltolni?

9. A sorozatnak tagja van vagy eleme?
10. A terület „gyanús". Hány adat határozza meg?

$$T=\frac{a\cdot m_a}{2};\ T=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2};\ T=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}$$

11. Megfelelő a sorrend?

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\equiv\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\equiv\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\equiv\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\equiv\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

12. Mit tanítsunk a másodfokú egyenlet gyökeinek különbségéről?
Mi van, ha paraméteres az egyenlet?
13. Másodfokú paraméteres egyenlet diszkriminánsa teljes négyzet. Hogyan oldjuk meg?
14. Szegény mértani sorozat. A $q = 0$-t érdemes kizárni?
15. Hol használjuk jelölésre az s betűt.
Miért?
16. Amit a középiskola tanít az igaz, de nem a teljes igazság!
Mi a teljes igazság?

$$\left(\sqrt{ab}\equiv\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}\,?\right)$$

17. Legyenek-e mindenki által tanítható, tanítandó tanpéldáink?
18. (A „MEGLEPETÉS")
Mit kezdhetünk a következő két azonossággal?
a) $k^2(k+1)-(k-1)^2k\equiv 3k^2-k$
b) $\sum_{k=1}^{n} na_k\equiv na_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$

VARGA TAMÁS
Módszertani Napok
2010

ÁCS PÁL (Ácspali)
tanár úr emlékére

Rábai Imre

Én most is csak kérdezek!

1. Legyenek-e tanítható (tanítandó) [közös] „tanpéldáink"?

2. Milyenek legyenek a tankönyvek „tanpéldái"?

(A „feltételes trigonometrikus azonosság számítási feladatok" ((tanácsolt [?])) megoldási módszerei) [Elnevezés tőlem, megfelel?]
{Legyen-e a „gyakorlati szakmódszertant" tartalmazó tanári segédkönyv?`((Hogyan tanítottam (bő 50 évvel ezelőtt) a „kétoldali megközelítés" módszerét?))}

3. Melyik a középiskolában tanított matematika „legpechesebb" tananyagrésze?

a) Mit tanítsunk a középiskolában a trigonometrikus egyenletrendszerekről?
b) Volt egyszer egy országos felmérő dolgozat!

1. A $\sin x + \cos y = 2$ egyenletnek megoldása-e az $x = \frac{5\pi}{2}$, $y = -2\pi$ számpár?
Oldja meg az egyenletet! (Írt róla a Matematikai Tanítása 1976./I.)

2. Egyetemi példatári feladat:
$(\cos y)\sin(2x+y) = 0$, $(\cos x)\cdot\sin(x+2y) = 0$, $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le y \le 2\pi$ megoldásai. [...]

4. Ismerik? Alkalmazzák?

a) $\frac{a}{\sin\alpha} = \ldots.. = \frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$;

b) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, $a > b$;

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{c - a\cos\beta}{a\sin\beta}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{a\sin\gamma}$.

d) (Munkásságom eredménytelensége!)
((Egy kezdő tanárnak sok minden új!))

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \equiv \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \equiv \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

(Szűkítő azonosságok. Mit ír erről Varga Tamás?)

HOGYAN OLDJUNK MEG FELADATOKAT?

ELŐSZÖR *Értsd meg* a feladatot.	**A FELADAT MEGÉRTÉSE** • ***Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?*** • Kielégíthető-e a kikötés? Elegendő a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne? • Rajzolj ábrát. Vezess be alkalmas jelölést. • Válaszd szét a kikötés egyes részeit. Fel tudod írni őket?
MÁSODSZOR Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között. Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után. Végül készítsd el a megoldás *tervét*.	**TERVKÉSZÍTÉS** • Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól kissé eltérő formában? • ***Nem ismersz valami rokon feladatot?*** Vagy olyan tételt aminek hasznát vehetnéd? • ***Nézzük csak az ismeretlent!*** Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez — vagy ehhez hasonló — az ismeretlen. • ***Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani?*** Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni? • Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót! • Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal. Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el. Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat még? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz? • Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Számbavetted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?
HARMADSZOR *Hajtsd végre* tervedet.	**TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA** • ***Ellenőrizz minden lépést,*** amikor végrehajtod tervedet. Bizonyos vagy benne, hogy a lépés helyes? Be is tudnád bizonyítani, hogy helyes?
NEGYEDSZER *Vizsgáld meg* a megoldást.	**A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA** • Nem tudnád ***ellenőrizni az eredményt?*** Nem tudnád ellenőrizni a bizonyítást? • Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt? Nem tudnád az eredményt egyetlen pillantásra belátni? • Nem tudnád alkalmazni az eredményt vagy a módszert valami más feladat megoldására?

MATEMATIKA gyakorlati
Szakmódszertani kérdések
Varga Tamás Napok, 2011. november

Rózsa Pál
matematikus
egyetemi tanár
emlékére

I. 1. Egy neves történeti dátum (1896. márczius. 15.) és a matematika oktatása.
2. Egy közeli ország érettségi példája. (Rózsa Pál: Mátrixok.)
3. ELTE MATEMATIKA INTÉZET igazgatóinak (Lovász László, Frank András) dedikációi. [3+1 (!)]

II. 1. Arany Dániel és Rátz László.

2. $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2^n = ?$

a) $A_{3,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{3,1}^n = ?$, $A_{3,2}^n = ?$, $A_{4,1}^n = ?$, $A_{4,2}^n = ?$

3. Hogyan oldhatta meg a példatárban kitűzött feladatot a példatár összeállítója?
[Két jó eredmény, két hamis eredmény.]

4. Különbzéki és egészleti hánylat. (MDCCCLXI)
Az előforduló számok sorozata I–II. Varga Tamás Napok, 2010.

5. „Ácspali" és „Oláhgyuri".
Rátz László Vándorgyűlés, 2011. [Révkomárom].

a) Hol alkalmazható? $\left[\dfrac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}\right]$

b) (2c, 4/a, I–II/2)

6. Többszörösen végtelen sok „preparált" feladat.
$\left[x^2 + px + q = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = D,\ \text{és} \ldots\right]$

7. Bevezető (tanulságos) tanpéldácskák.
$(x-2)^2 = \sqrt{4 - 4x + x^2}$. Hogyan tanítaná a megoldást?
[Én (nemcsak) úgy!]

8. Észrevette valaki? MILYENEK LEGYENEK?
(Módszertani cikk a példatárban?)

9. Egy pont és egy egyenes távolságképletének alkalmazása egy érettségi-felvételi feladat megoldása során.

10. Miért konstruáltam egy érettségi-felvételi feladat „testvérfeladataként" feladatokat?

11. Szorgalmi feladat.(Egyetlen függvénytranszformációval a $g(x) = \ldots$ elemi (alap)függvény grafikonjából vázolja az $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - \dfrac{3}{4}$ függvény grafikonját!)

Rábai Imre

Olvasóinkhoz!

Midőn a **Középiskolai Mathematikai Lapok** szerkesztését átveszem, nem tartom szükségesnek, hogy részletes programmot adjak. A lap ezentul is a mathematikai tanítás szolgálatában fog állani, iránya nem változik, czélja marad a régi.

Jól ismerem vállalkozásaimnak nehézségeit, de elhatározásomat megkönnyítette azon kedvező körülmény, hogy a lap lelkes alapítója s eddigi buzgó szerkesztője **Arany Dániel** ur ezentul is megmarad főmunkatársnak. Tudását s bő tapasztalatait a legnagyobb készséggel bocsátja a lap rendelkezésére.

A kedvező ilélet, melylyel a hazai sajtó a Középiskolai Mathematikai Lapokat fogadta, mutatja hogy a magyar középiskolának e közlönyre szüksége van. Feladatát azonban csak ugy fogja sikeresen megoldhatni, ha minél szélesebb körökben terjed el s támogatói nem csak **olvassák**, de egyuttal **írják** is a lapot. Ez okból tisztelettel jesen felkérem t. szaktársaimat, főkép pedig a lap eddigi munkatársait, hogy engem nehéz munkámban támogassanak s közleményeikkel a Középiskolai Mathematikai Lapokat felkeresni sziveskedjenek.

Budapest, 1896. márczius hó 15-én.

Rátz László
főgymnásiumi tanár.

Az előforduló műszók sorozata.*)

Ábra, Figur.
Alderéklő, Subnormale.
Alérintő, Subtangente.
Átló, Diagonale.
Átmérő, Durchmesser.

Befogó, Kathete.

Csigavonal, Spirallinie.

Déllő, Meridian.
Deréklő sík, Normalebene.
Derékmetszet, Normalschnitt.
Domború, convex.

Egyensúly, Gleichgewicht.
Egyenszög, Rechteck.
Elemezni, analysiren.
Ellentállás, Wiederstand.
Érintő sík, Tangenzialebene.

Félmérő, Halbmesser.
Feszítés, Spannung.
Forgási felület, Umdrehungs-Fläche.

Góczhúr, Parameter.
Gömb, Kugel.
Gömbi szívvonal, sphärisches Cardioid.
Görbüléki szög, Contingenz-Winkel.
Görbület, Krümmung.
Görbület kör, Krümmungskreis.
Görbület sugár, Krümmungs-halbmesser.
Görbület vonal, Krümmungslinie.
Gúla, Pyramide.
Gyökszorzó, Wurzelfactor.
Gyupont, Brennpunkt.

Hajlási szög, Neigungswinkel.
Hajtalékdad, Paraboloid.
Hajtaléki csigavonal, parabolische Spirale.
Hármas, Terne.
Hasáb, Prisme.
Henger felület, Cylinderfläche.
Homorú, concaw.
Hosszegység, Längeneinheit.
Hurokvonal, Lemniscata.

Ihlető kör, oskulatorischer Kreis.

Jegecztan, Krystallographie.
Jegyfolytatás, Zeichenfolge.
Jegyváltás, Zeichenwechsel.

Kagylóvonal, Conchoide.
Kebelvonal, Sinuslinie.
Kerülékded, Ellypsoid.
Kerüléki hajtalékdad, ellyptisches Paraboloid.

---

*) Azon műszók, a melyek itt elő nem fordulnak, az I. kötet végéhez csatolt „műszók sorozatában" keresendők fel.

Kerüléki henger, ellyptischer Cylinder.
Kerüléki kerülékded, ellyptisches Ellypsoid.
Kerüléki kúp, ellyptischer Kegel.
Kerüléki mentelékded, ellyptisches Hyperboloid.

Kettős, Ambe.
Köb, Würfel.
Körhenger, Kreiscylinder.
Körpont, Kreispunkt.
Körkúp, Kreiskegel.
Külpontosság, Excentricität.
Kúpdad felület, conoidische Fläche.
Kúpdadi csavarfelület, conoidische Schraubenfläche.
Kúpfelület, Kegelfläche.
Kúpszelet, Kegelschnitt.

Lábpont, Fußpunkt.
Lánczvonal, Kettenlinie.
Lefejtett, Evolute.
Lefejtő, Evolvente.
Logarcsigavonal, logarithmische Spirale.

Mentelékded, Hyperboloid.
Menteléki csigavonal, hyperbolische Spirale.
Menteléki hajtalékdad, hyperbolisches Paraboloid.
Menteléki henger, hyperbolischer Cylinder.
Mértani hely, geometrischer Ort.
Mutató, Index.
Mutató sor, Reihe der Indices.

Öv, Zone.

Párlag, Parallelogramm.
Párkör, Parallelkreis.
Petérd, Ellysoid.

Repkényvonal, Cissoide.

Sark, Pol.
Serlegvonal, Scyphoide.
Sík, Ebene.
Síkmértan, Geometrie in der Ebene.
Sokszög, Polygon.
Származék, *vagy*
Származtatott függvény, derivirte Function.
Szelde, Trace.
Szívvonal, Cardioid.

Tekercs, Wulst.
Többtagú, Polynom.
Tömörszög, Körperwinkel.
Torz, *vagy*
Torzult felület, windschiefe Fläche.

Végérintő, Assymtote.
Vetítő sík, projicirende Ebene.
Vetítő vonal, projicirende Linie.
Vezető sugár, Radiusvector.
Visszafordulási él, Rückkehrkante.
Vontatási vonal, Tractoria.

Ajánlja: Rátai Ivó(?)

44

Oláh Gyuri és a többi
Szlovákiában élő és tanító
magyar matematikatanár
tiszteletétére
2011 Révkomárom

Pólya György sokat kérdez és sok tanácsot ad
(A gondolkodás iskolája, A problémamegoldás iskolája)
Rábai Imre néhány egyszerű kérdése. Beszéljük meg!

I.

1. Ezek az egyenletek ekvivalensek?
   11 egyenlet. Lehet-e egy fontos egyenlet ($A\cos x + B\sin x = C$) megoldásához egy módszert megismerni, tanítani? $\left[4\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - 3 = 0; \dots; \sin y + 7\cos y = 1.\right]$

2. Lehet-e (szükséges-e) lektorálni egy példatárat?
   [Példatárak eredményeit, megoldásait, módszereit érdemes-e vizsgálni?]
   (Matematikai feladatgyűjtemény II.
   (Az $ax^2 + bx + c = 0$. $x_1 = 5$, $ac = 5$ és $a + b + c = 0$, ...))

3. Melyik a legpechesebb matematika tananyagrész a középiskolai tananyagban?
   (Mit tanítsunk a kétismeretlenes (nem lineáris) egyenletrendszerekről? Mit tanítsunk a trigonometrikus egyenletrendszerekről?...)
   [Mikor szimmetrikus egy kétismeretlenes egyenletrendszer? Van-e konjunktív, illetve diszjunktív egyenletrendszer?]

4. a) Mikor adta át Arany Dániel Rátz Lászlónak a Középiskolai Mathematikai Lapok szerkesztését?
   b) Megszüntették-e a Középiskolai Matematikai Lapokat az 1940-es évek elején?

5. Milyen sorsa lehet egy feladatnak?
   [1894; 1964; 1968; 2003.]
   (Vigyázzunk a feladat megfogalmazására:
   Ne tegyük a feladatot még egy kicsit se túlhatározottá!)
   Érettségi feladat (1894. Mende Jenő.)
   a) Egy háromszög oldalai olyan számtani sort alkotnak, melynek különbsége 1. A legkisebb szög fele a legnagyobbnak. Meghatározandók az oldalak és a szögek.
   b) (Érettségi 1964.) Egy háromszög legnagyobb oldalával szemközt fekvő szög kétszer akkora, mint a legkisebb oldallal szemközt fekvő. A háromszög oldalai egymás után következő egész számok. Határozzuk meg az oldalakat és a szögeket!
   (Lukácsné–Rábai: Feladatok és megoldások.)

6. Tanítsunk-e néhány (majdnem triviális) azonos egyenlőtlenséget és alkalmazását (nehéz) felvételi (érettségi) feladat megoldása során?

[1. $(a-b)^2 \geq 0$, ... 2. $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 \geq 0$, ... 3. $\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 0$, ...]

a) Felvételi 1973: $f(x;y)=x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}$ kifejezés legkisebb értéke? (!!! Mi történt a felvételin 1973-ban?)

b) Bizonyítsa be, hogy ha $x^2+y^2=1$, akkor $|x+y| \leq \sqrt{2}$. Mely számpár esetén egyenlő?
[Kétváltozós függvény feltételes szélsőértéke.] $\left(?\, a \equiv \sqrt{a^2}\, ?\right)$
(1989. felvételi.)

7. Van-e valami közös a feladatokban?
Három felvételi feladat – időben távol egymástól (1962; 1989; 1995.)
a) Milyen módszereket lehet megtanítani?
b) A k kör érinti az x-tengelyt és a $3x+4y=65$ egyenletű e egyenest; a kör és az e egyenes közös pontjának abszcisszája 11. Írja fel a kör egyenletét!
(1989.)
c) [Róka Sándor tanár úrnak, köszönettel a megemlékezésért. Melyik módszert nem mondtam el a FEB táborban?]

8. Még mindig? VIGYÁZAT! SZŰKÍTŐ AZONOSSÁG.
„Nyomtatásban" olvasom (2003)
Oldjuk meg a $7^{\log_3 x^2} - 7^{\log_9 x^2} - 42 = 0$ egyenletet.
(... és $\log_3 x^2 \equiv 2\log_3 x$, ...)

9. Volt-e olyan feladat, amelyet a Nemzetközi Diákolimpián és az egyetemi felvételin is kitűztek?
Milyen megoldási módszereket ajánlhatunk?
[Mely valós x értékekre teljesül, hogy
$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9$?]

10. Mire tanít az emelt szintű próba érettségi kétismeretlenes egyenlete?
$(16x^2-(8\cos y)x+1=0)$

II.

1. Oldja meg a következő egyenleteket!

1.1 $4\mathrm{tg}^2x-\mathrm{tg}x-3=0$;

1.2 $3\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}x-4=0$;

1.3 $4\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x-1=0$;

1.4 $4\sin^2x-6\sin x\cdot\cos x-3\cos^2x=0$;

1.5 $7\sin^2x-\sin x\cdot\cos x-3=0$;

1.6 $7\cos^2x+\sin x\cdot\cos x-4=0$;

1.7 $5\sin^2x-\sin x\cdot\cos x-2\cos^2x=1$;

1.8 $7\sin x-\cos x=\dfrac{3}{\sin x}$;

1.9 $7\cos x+\sin x=\dfrac{4}{\cos x}$;

1.10 $\sin 2x+7\cos 2x=1$;

1.11 $\sin y+7\cos y=1$;

Általános: $A\sin^2x+B\cos^2x+C\sin 2x+D\cos 2x+E\sin x\cos x+F=0$;
(Matematikai füzetek. 1997. III. 14.)

2. Számítsa ki az $ax^2+bx+c=0$ egyenletben a, b és c értékét, ha $x_1=5$, $ac=5$ és $a+b+c=0$.
Két hamis, ..., $(a;\ b;\ c)=(5;\ -6;\ 1)$, ... $=(-5;\ 6;\ 1)$ és két jó megoldás található a példatárban.

3. Oldja meg! $0\le x$; $y\le 2\pi$; $(\cos y)\cdot\sin(2x+y)=0$, $(\cos x)\cdot\sin(x+2y)=0$.
(Az egyetemi példatárban közölt „megoldás" nagyon problematikus. Gyökvesztéssel jár! Hány megfelelő számpár van?)

5. a) Egy háromszög középső oldala 1-gyel nagyobb, mint a legkisebb, és 1-gyel kisebb, mint a legnagyobb oldal. A legnagyobb szög kétszerese a legkisebbnek. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?
(Tankönyvi feladat. 1968)
b) Egy háromszög oldalai egymást követő egész számok. A legnagyobb szög kétszerese a legkisebbnek. Mekkorák a háromszög szögei és oldalai?
(Tankönyvi feladat. 2003)

6. a) $x^4+y^4\ge 2x^2y^2$, ..., $a^2+\dfrac{1}{a^2}\ge 2$, ... $f(x;y)=\ldots\ge 2\left(x^2y^2+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)\ge 4$ ... $x=\ldots, y=$ ...
b) ! $\left(|a|\equiv\sqrt{a^2}\right)$; $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow 2ab\le a^2+b^2$, ...
$|x+y|\equiv\sqrt{x^2+y^2+2xy}\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{2}$. ...

7. a) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y-tengelyt az origóban érinti, és érinti az $y=x+1$ egyenletű egyenest is!
(Lásd Feladatok és megoldások.)
c) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x-tengelyt, és a $P(4;8)$ pontban érinti az $(x+4)^2+(y-2)^2=100$ egyenletű kört!
(Rábai: Matematika érettségi 1995. (Calibra. 1995. 5.5 feladat.))

8. ... Csak az $x=3$ lehet gyök. (Igaz?)
Ellenőrzés ... (Így mit sem ér! Mit ajánlhatunk a feladat kitűzőjének?)
[! $\log_3 x^2 \equiv 2\log_3|x|$!]

9. $\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9$

1. **Áttekinthetőbbé** tehető új ismeretlen bevezetésével. $1+2x \geq 0$ és $1+2x \neq 1$, azaz
$-\frac{1}{2} \leq x < 0$ vagy $x > 0$.
$\sqrt{1+2x} = y$, $y \geq 0$, $y \neq 1$.
$2x = y^2 - 1$,
$4x^2 = (y-1)^2(y+1)^2 \Rightarrow \dfrac{(y-1)^2(y+1)^2}{(1-y)^2} < y^2+8, \ldots$
$2y+1<8$, $0 \leq y < \frac{7}{2}$ és $y \neq 1$, $0 \leq y < 1$ vagy $1 < y < \frac{7}{2}$
$0 \leq 1+2x < 1$ vagy $1 < 1+2x < \frac{49}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$ vagy $0 < x < \frac{45}{8}$.

2. Bővítsünk $\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$-nel figyelembe véve, hogy $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ vagy $x > 0$.
$\dfrac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(1-(1+2x)\right)^2} < 2x+9 \Rightarrow 1+2x < \frac{49}{4}$ és $-\frac{1}{2} \leq x$ és $x \neq 0$.
$-\frac{1}{2} \leq x < 0$ vagy $0 < x < \frac{45}{8}$.

10. $16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0$

Ajánlott: 1. ... Diszkrimináns, $D \geq 0$, $\cos^2 y = 1$
$\cos y = 1$, $x = \frac{1}{4}$ vagy $\cos y = -1$, $x = -\frac{1}{4}, \ldots$
2. Megoldóképlettel [Ez nem ad új megoldást – szerintem.] ...
$x = \dfrac{\cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}}{4} \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \cos y = 1$ vagy $\cos y = -1$
II. megoldás: $(4x - \cos y)^2 + \left(1-\cos^2 y\right) = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \cos y = 1$ vagy $\cos y = -1$

III. megoldás: $x = 0$ nem lehet megoldás, $x \neq 0$, $16x + \frac{1}{x} = 8\cos y$.

Ha $x > 0$, akkor (mivel a bal oldal csak 8 lehet), $x = \frac{1}{4}$ és $\cos y = 1$.

Ha $x < 0$, akkor (mivel a bal oldal csak -8 lehet), $x = -\frac{1}{4}$, és $\cos y = -1$.

($a<0$, $b<0$ esetén $a+b \leq -2\sqrt{ab}$, $16x + \frac{1}{x} \leq (-2)\sqrt{16}$.)

Rábai Imre

Rábai Imre: A „TUDÁKOSSÁG KÖNYVEI" ÉS A BOLYAI INTÉZET (az SZTE Bolyai Intézetének tiszteletére)

1. Legyen „TUDÁKOSSÁG" posztumusz díj eltávozott kiváló matematikatanároknak!
[Bakos Tibor, Soós Paula, ...]

2. Matematika gyakorlati szakmódszertani problémák.

2.1. Kétismeretlenes egyenletek.
(Mi a megoldása egy elsőrendű (másodrendű) közönséges differenciálegyenletnek?)

2.2. Mit tanítson a középiskola a kétismeretlenes egyenletrendszerekről?
(Kétváltozós függvények helyi szélsőértéke.)

2.3. Egyszerű azonos egyenlőtlenségek alkalmazása kétváltozós függvény feltételes szélsőértékének meghatározására.

(Érettségi felvételi feladatok.)

2.4. A legkisebb területű (valódi) H-háromszöget (Heron) nevezzük SZENDREI háromszögnek!
(13, 14, 15, ...?)

2.5.
a) Mióta nulla a null? Ki javasolta?
b) Mi az a czifra? (...„az ájtatos iskolák"...) ...
c) Külzeléki és egészleti... [MDCCCLXI.]

2.6 Megemlékezések a KöMaL-ban *szegedi* professzoraimra, kollegáimra.

Rábai Imre
akit 60 éve neveztek ki a Bolyai Intézetbe (1951-1956; 2011)