X. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

A trigonometrikus egyenletrendszerek megoldása során kísérletezhetünk új változók bevezetésével, azonosságok alkalmazásával, helyettesítő módszerrel vagy más, már alkalmazott módszerekkel.

a) Oldjuk meg a $\left.\begin{array}{l}\sin^2 x - \cos y = 1,\\ \sin^2 x + \cos y = 1\end{array}\right\}$ egyenletrendszert.

Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazhatjuk. $\sin^2 x = 1$ és $\cos y = 0$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, ahol k és n egymástól függetlenül bármely egész számot felvehet.

M. 51. Határozza meg a
$\left.\begin{array}{l}\sin y + \cos x = 0,\\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\end{array}\right\}$
egyenletrendszer $[0, 2\pi]$ intervallumba eső megoldásait.

b) Határozzuk meg azokat az (x, y) számpárokat, amelyek kielégítik a $\sin x + \cos y = -2$ egyenletet!

Az egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $\sin x = -1$ és $\cos y = -1$, azaz $(x, y) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2n\pi\right)$, ahol k és n egymástól függetlenül befutja az összes egész számot.

M. 52. Határozza meg azokat az (x, y) számpárokat, amelyek kielégítik a $2\sin x = y + \frac{1}{y}$ egyenletet!

c) Mely valós x-ekre értelmezhető a

1. $\mathrm{tg}(\pi\cos x)$, **2.** $\sqrt{\mathrm{tg} 2x - \sqrt{3}}$; **3.** $\log_x \cos x$ kifejezés ?

Az 1-nek nincs értelme, ha $\cos(\pi\cos x) = 0$, $\pi\cos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos x = \frac{1}{2} + k$.

Ha $k = 0$, akkor $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, ha $k = -1$, akkor $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, k egyéb értékeire nem kapunk megoldást.

A megállapított x értékeken kívül minden x-re értelmezett a függvény.

2. Ha $\mathrm{tg}\, 2x \geq \sqrt{3}$, azaz $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

3. Ha $x > 0, x \neq 1$ és $\cos x > 0$, azaz $0 < x < 1$ vagy $1 < x < \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{2} + 2n\pi$, ahol n tetszőleges nem negatív egész szám.

M. 53. Mely valós x-ekre értelmezhető a

a) $\frac{\mathrm{ctg}\,\pi x}{\mathrm{tg}\,2x}$; **b)** $\sqrt{\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{ctg}\,2x}$; **c)** $\lg\sqrt{\cos x}$; **d)** $\sqrt{\lg\cos x}$ kifejezés?

Megoldások az előző hétről

M. 51. $\sin y = -\cos x$, $\sin 2x = -1$, $2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Ha $x = \frac{3\pi}{4}$, akkor $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_2 = \frac{3\pi}{4}$, így $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ a megoldások.

Ha $x = \frac{7\pi}{4}$, akkor $\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1 = \frac{5\pi}{4}$, $y_2 = \frac{7\pi}{4}$, így $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ a megoldások.

M. 52. Az $y^2 - 2(\sin x)y + 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsa, $4\sin^2 x - 4$, csak nulla lehet. Ha $\sin x = 1$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = 1$; ha $\sin x = -1$, akkor $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $y = -1$.

M. 53. a) Ha $\sin\pi x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ és $\mathrm{tg}\,2x \neq 0$. $x \neq k$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

b) Ha $\mathrm{tg}\,2x > 0$, azaz $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

c) Ha $0 < \cos x \leq 1$, azaz $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

d) Ha $\cos x = 1$, $x = 2n\pi$.

XI. KOORDINÁTA GEOMETRIA

Koordináta geometria feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy ismerve a geometria feladat szerkesztés útján való megoldását, a szerkesztés minden egyes lépését számítással követjük.

a) Határozzuk meg a $3x - y = -1$ egyenletű „*e*" egyenesnek azt a pontját, amely az $A(6; 3)$ és a $B(0; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra van!

A keresett pont az *AB* szakasz felező merőlegesének és az „*e*” egyenesnek közös pontja. Az *AB* egyenes egy irányvektora $v = (3; 2)$ (meredeksége $m = \frac{2}{3}$), *AB* felezéspontja $F(3; 1)$, a felező merőleges egyenlete $3x + 2y = 11$. E felező merőleges és az „*e*” egyenes közös pontja $K(1; 4)$, melyet az egyenletük által meghatározott egyenletrendszer megoldásaként kapunk.

Koordináta geometria feladatokat segédváltozó, paraméter segítségével is megoldhatunk. A keresett vonal egyenletében vagy máshol, egy vagy két változót betűvel jelölünk, azaz paraméternek választunk. A feltételek alkalmazásával ezekre annyi (független) egyenletet írunk fel, ahány paramétert választottunk. A paraméterek meghatározása lényegében a feladat megoldását jelenti.

Oldjuk meg ezzel a módszerrel is a feladatunkat. Legyen az „*e*” egyenes egy tetszőleges pontjának abszcisszája *t*, ekkor ordinátája $3t + 1$, az egyenes egy futó pontja tehát $P(t, 3t + 1)$. Olyan *t* értéket keresünk, amelyre $AP = PB$, azaz $AP^2 = PB^2$. $(6 - t)^2 + (3t - 2)^2 = t^2 + (3t + 2)^2$, $t = 1$, azaz $K(1; 4)$.

M. 54. Az *e* egyenes áthalad az origón és egy irányvektora $v(4; 3)$ (meredeksége $m = \frac{3}{4}$). Az *f* egyenes két pontja $A(1; 7)$ és $B(22; -21)$. Számítsa ki az *e* és az *f* egyenes metszéspontjának koordinátáit, és e metszéspont távolságát *A*-tól!

M. 55. A *P* pont egyenlő távolságra van az $5x - 3y = 6$ és az $5x - 3y = 12$ egyenletű egyenesektől. Számítsa ki *b* értékét, ha $P(3; b)$!

M. 56. Az *ABCD* téglalap *AB* oldalának egyenlete $3x + y = 0$, átlói az $F(12; -6)$ pontban metszik egymást, az *AG* átló párhuzamos az *x* tengellyel. Határozza meg a *B, C, D* csúcsok koordinátáit!

M. 57. Számítsa ki az $x + 2y = 7$ egyenletű egyenes azon pontjának a koordinátáit, amely az $A(3; 7)$ ponttól 5 egység távolságra van!

M. 58. Mely pontokban metszi az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört az $x + 7y = 25$ egyenletű egyenes? Milyen hosszú húrt metsz ki a kör az egyenesből? Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

Megoldások az előző hétről

M. 54. Az e egyenes egyenlete $3x - 4y = 0$, az f egyenes egyenlete $4x + 3y = 25$, metszéspontjuk $M(4; 3)$, $MA = 5$.

M. 55. A P pont rajta van a két párhuzamos egyenes középpárhuzamosán, melynek egyenlete $5x - 3y = 9$. Így $15 - 3b = 9$, $b = 2$.

M. 56. Az AC átló egyenlete $y = -6$. Az AB és AC egyenesek metszéspontja $A(2; -6)$. A C pont az A pont tükörképe az F pontra, $C(22; -6)$. Á B pont az AB egyenes ($3x + y = 0$) és a C pontból az AB-re emelt merőleges (egyenlete $x - 3y = 40$) metszéspontja, $B(4; -12)$. A B pont tükörképe az F pontra $D(20; 0)$.

M. 57. Két ilyen pont van: $A(3; 2)$ és $B(-1; 4)$.

M. 58. A metszéspontok: $A(4; 3)$, $B(-3; 4)$. A húr hossza: $\sqrt{50}$ egység. Az AOB háromszög egyenlőszárú derékszögű, így a keresett távolság $\frac{1}{2}\sqrt{50}$ egység

XII. KOORDINÁTA GEOMETRIA

Koordináta geometriai feladatok megoldása során az elemi geometriában megismert tételeket is alkalmazhatjuk, ha arra lehetőség van.

a) Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x + y = 10$ egyenletű egyenesre, és felezi az adott egyenes és a koordinátatengelyek által határolt háromszög területét!

A $2x + y = 10$ egyenes az x tengelyt az $A(5; 0)$, az y tengelyt a $B(0; 10)$ pontban metszi. Messe a keresett egyenes az AB egyenest a P pontban, ha az ordinátatengelyt az $M(0; 6)$ pontban metszi, akkor egyenlete $y = \frac{1}{2}x + b$. A BMP háromszög hasonló az ABO háromszöghöz, a hasonlósági arány a területek négyzetgyökének aránya, $1 : \sqrt{2}$. Mivel $MB = 10 - b$, $AB = 5\sqrt{5}$, ezért $\frac{10-b}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 10 - 5\sqrt{2{,}5}$. A keresett egyenes egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + 10 - 5\sqrt{2{,}5}$.

Dolgozhatunk paraméteresen is. A P pont abszcisszája, $x = \frac{2}{5}(10-b)$, az MPB háromszög MB oldalához tartozó magassága, s mivel a háromszög területének kétszerese 25, ezért $\frac{2}{5}(10-b)^2 = 25$, $b = 10 \pm 5\sqrt{2{,}5}$, amiből csak a $b = 10 - 5\sqrt{2{,}5}$ a megoldás.

Feladatok megoldása során vektorok koordinátáival is dolgozhatunk. Ha a vektorok koordinátáikkal adottak, akkor alkalmazhatjuk két vektor összegének, különbségének, egy vektor számszorosának és egy vektor 90°-os elforgatásával kapott vektornak a koordinátáira vonatkozó ismereteinket.

b) Az $ABCD$ rombusz két szemközti csúcsa $A(8; -3)$, $C(10; 11)$. A rombusz oldala 10 egység. Határozzuk meg a B és a D csúcspontok koordinátáit!

Mivel $AC = 10\sqrt{2}$, ezért $ABCD$ négyzet. Az átlók metszéspontja $F(9; 4)$. Egy pont koordinátái megegyeznek a pontba mutató helyvektor koordinátáival. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} =$ $(9; 4) - (8; -3) = (1; 7)$. Ha az $\overrightarrow{AF}$ vektort pozitív, illetve negatív irányba 90°-kal elforgatjuk, akkor az $\overrightarrow{FB}$, illetve az $\overrightarrow{FD}$ vektort kapjuk, $\overrightarrow{FB} = (-7; 1)$, $\overrightarrow{FD} = (7; -1)$. Így $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB} =$ $(9; 4) + (-7; 1) = (2; 5)$, $B(2; 5)$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} = (9; 4) + (7; -1) = (16; 3)$, $D(16; 3)$.
Természetesen a feladat más módon is megoldható!

M. 59. Írja fel paraméterek alkalmazásával azon körök egyenletét,
a) amelyek középpontja az ordinátatengelyen van;
b) amelyek középpontja az ordinátatengelyen van, és érintik az abszcisszatengelyt.

M. 60. Mi az egyenlete annak a körnek, amely az abszcisszatengelyt az origóban érinti, és érinti az $y =:x + 4$ egyenletű egyenest is?

M. 61. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának háromszorosa, a hosszabbik átló végpontjai: $B(6; 4)$ és $D(-6; -2)$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

Megoldások az előző hétről

M. 59. a) A középpont abszcisszája nulla, paraméternek a középpont ordinátáját, v, és a kör sugarát, r, választhatjuk. $x^2 + (y - v)^2 = r^2$.

b) Most $r = |v|$, ezért $x^2 + (y - v)^2 = v^2$, $x^2 + y^2 - 2vy = 0$.

M. 60. Az $x^2 + y^2 - 2vy = 0$ egyenletű körök közül keressük azt a kört, amely érinti az $y = x + 4$ egyenest. Az $x^2 + (x + 4)^2 - 2v(x + 4) = 0$ egyenlet diszkriminánsa nulla kell, hogy legyen, $(v + 4)^2 = 32$, $v = -4 \pm 4\sqrt{2}$. Két ilyen kör van, egyenletük $x^2 + y^2 + \left(8 + 8\sqrt{2}\right)y = 0$, $x^2 + y^2 + \left(8 - 8\sqrt{2}\right)y = 0$.

A feladat elemi geometria alkalmazásával és más módokon is megoldható.

M. 61. Az átlók metszéspontja $F(0; 1)$, $\overrightarrow{FB} = (6; 3)$. Az $\overrightarrow{FC}$ vektor az $\overrightarrow{FB}$ vektor pozitív irányú 90°-os elforgatottjának $\frac{1}{3}$-szorosa, $\overrightarrow{FC} = (-1; 2)$. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FC} = (0; 1) + (-1; 2) = (-1; 3)$, $C(-1; 3)$. A C tükörképe az F-re, $A(1; -1)$.

Oldja meg a feladatot a szerkesztés menete szerint is. Az AC egyenes egyenlete $2x + y = 1$, $FB = 3\sqrt{5}$, $FC = \sqrt{5}$. Az A és a C pontok rajta vannak az F középpontú, $r = FC$ sugarú, $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ egyenletű körön. $5x^2 = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 3$.

A két csúcspont : (1; –1) és (–1; 3).

XIII. KOORDINÁTA GEOMETRIA

a) Írjuk fel az $y = 4x^2 + 4$ egyenletű parabola origón áthaladó érintőinek egyenletét !

Az origón áthaladó $x = 0$ egyenletű egyenes metszi a parabolát. Az origón áthaladó $y = mx$ egyenletű egyenes akkor és csak akkor érinti az $y = 4x^2 + 4$ egyenletű parabolát, ha a két egyenlet által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott $4x^2 - mx + 4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa nulla, $m^2 - 64 = 0$, $m = 8$ vagy $m = -8$. Az érintők egyenlete $y = 8x$ vagy $y = -8x$.

Dolgozhatunk a differenciálhányados alkalmazásával is. Az $y = 4x^2 + 4$ függvény $x = a$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő meredekségét az $y' = 8x$ differenciálhányados függvény $x = a$ helyen vett helyettesítési értéke adja, $m = 8a$. Az E érintési pont rajta van az $y = mx$ egyenletű egyenesen, így $E(a; 8a^2)$. Az E pont rajta van a parabolán is, így $8a^2 = 4a^2 + 4$, azaz $a = 1$ vagy $a = -1$, $m = 8$ vagy $m = -8$.

b) Milyen helyzetűek az $y = mx + 2$ egyenletű egyenesek az $y^2 = 4x$ egyenletű parabolához képest?

Ha $m = 0$, akkor $y = 2$, $4x = 4$, $x = 1$. Az egyenes az $(1; 2)$ pontban metszi a parabolát, az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével. Ha $m \neq 0$, akkor $x = \frac{y-2}{m}$, $my^2 - 4y + 8 = 0$. Ez utóbbi egyenlet diszkriminánsa $D = 16(1 - 2m)$. Ha $D > 0$, $m < \frac{1}{2}$, $(m \neq 0)$, akkor az egyenesek két pontban metszik a parabolát; ha $D = 0$, $m = \frac{1}{2}$, akkor az egyenes érinti a parabolát; ha $D < 0$, $m > \frac{1}{2}$, akkor az egyenesnek nincs közös pontja a parabolával.

c) Melyik az a $P(2; 1)$ ponton áthaladó egyenes, amelynek az $y^2 = 4x$ parabolán belül eső szakaszát a P pont felezi?

Az $x = 2$ egyenes nem felel meg. A többi ilyen egyenesnek van meredeksége, egyenletük: $y - 1 = m(x - 2)$. Ha a parabolával való metszéspontok ordinátája y_1, y_2, akkor ezek gyökei az $y^2 - \frac{4}{m}y + \frac{4}{m} - 8 = 0$ egyenletnek, $y_1 + y_2 = \frac{4}{m}$. A feltétel szerint $\frac{y_1 + y_2}{2} = 1$, ezért $\frac{4}{m} = 2$, $m = 2$.

Az egyenes egyenlete: $y - 1 = 2(x - 2)$.

M. 62. Határozza meg a $2y = x^2 - 4x + 6$ egyenletű parabolának azt a pontját, amely az $A(0; 5)$ és a $B(6; -1)$ pontoktól egyenlő távolságra van.

M.63. Egy egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa az origóban van, másik két csúcsa a $4y = x^2$ parabolára illeszkedik. Számítsa ki a másik két csúcs koordinátáit!

M.64. Határozza meg az $ax + by + 4a - 5b = 0$ egyenes egyenletében az a és b paraméter értékét úgy, hogy az egyenesnek csak egy közös pontja legyen az $y = x^2 + 4x + 5$ parabolával!

Próbálja a feladatot más módon is megfogalmazni!

Megoldások az előző hétről

M. 62. Két ilyen pont van, $P_1(2; 1)$ és $P_2(4; 3)$.

M. 63. A másik két csúcspont $\left(4\sqrt{3}; 12\right)$ és $\left(-4\sqrt{3}; 12\right)$.

M. 64. Az egyenes egyenletében a és b nem lehet egyszerre nulla, mert akkor az egyenlet nem egyenes egyenlete. Az a és b paraméterek olyan értékeit keressük, amikor a két vonal, egyenletéből álló egyenletrendszernek csak egy megoldása van. Helyettesítő módszerrel a $bx^2 + (a + 4b)x + 4a = 0$ *legfeljebb* másodfokú egyenlethez jutunk. Ha $b = 0$ és $a \neq 0$ tetszőleges, akkor $x = -4$, $y = 5$, az egyetlen közös pont: $(-4; 5)$. Ha $b \neq 0$, akkor az egyenlet diszkriminánsa $(a - 4b)^2$. Egy közös pont, érintési pont akkor és csak akkor van, ha $a = 4b$. (Az érintő egyenlete így $4x + y = -11$.)

Az adott egyenes $ax + by = -4a + 5b$ egyenletéből látható, hogy az egyenes átmegy a $(-4; 5)$ ponton. A feladat a következő módon is fogalmazható. Írja fel annak a $(-4; 5)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amelynek az $y = x^2 + 4x + 5$ parabolával egy közös pontja van! (Ha az egyenes egy irányvektora $v(-b; a)$, akkor egyenlete $ax + by = -4a + 5b$.)

XIV. GEOMETRIAI SZÁMÍTÁSI FELADATOK

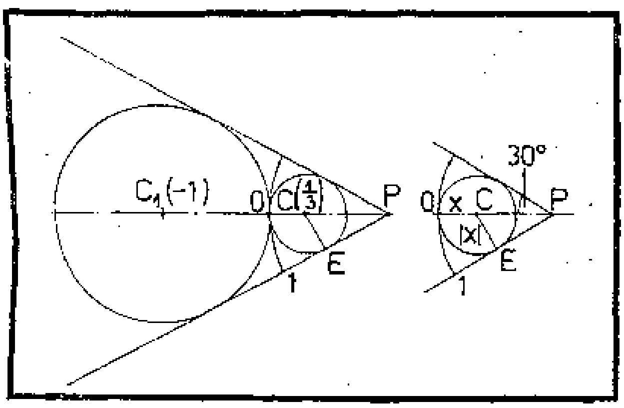
a) Egy egyenlőszárú háromszög szára 10 cm, az alap és a hozzá tartozó magasság összege n = 22 cm. Számítsuk ki a háromszög alapjának hosszát! Végezzük el a számítást akkor is, ha n = 20 cm, $n = 10\sqrt{5}$ cm, n = 23 cm.

Tegyük fel, hogy van ilyen egyenlőszárú háromszög, és jelölje az alap hosszát $2x$. Az alaphoz tartozó magasság $m = 22 - 2x$. E magasság két derékszögű háromszögre bontja a háromszöget, melyek befogója x és $22 - 2x$, így $x^2 + (22 - 2x)^2 = 100$; $x_1 = 8$, $x_2 = 9{,}6$. Ha van ilyen egyenlőszárú háromszög, akkor kettő van, és ezek alapja 16 cm vagy 19,2 cm. Mindkettő valóban megoldás! Ellenőrizze!

Ha n = 20, akkor csak az egyik gyök ad megoldást, az alap 12 cm; ha $n = 10\sqrt{5}$, akkor szintén egy megoldás van, az alap $8\sqrt{5}$ cm; ha n = 23, akkor nincs megoldás.

b) Egy 60°-os szög csúcsa köré egységkört rajzolunk. Számítsuk ki annak az egységkört érintő körnek a sugarát, amely a szög szárait érinti!

A feladatot szerkesztési feladatnak tekintve; ennek vizsgálatából kiderül, hogy a feladatnak két megoldása van. (Ha a feladat szerkesztése és annak vizsgálata egyszerűen, könnyen elvégezhető, megéri ezt megtenni! Gondolja meg, hogyan végezné el a szerkesztést.)



Tegyük fel, hogy van megoldás. Készítsünk elemző ábrát, amelyen egy megoldást felveszünk. Előjeles szakaszokkal számolunk. Gondolatban elhelyezünk célszerű módon egy számegyenest (esetleg egy derékszögű koordináta-rendszert) az ábrán.

Az ábrán a számegyenes kezdőpontja O, legyen $\overline{OC} = x$ ($\overline{OC}$ előjeles szakaszt jelent), a keresett kör sugara $|x|$. Mivel $CP = 1 - x$, $CE = |x|$, $PE = \sqrt{3}|x|$, ezért $(1 - a)^2 = x^2 + 3x^2$, amiből $x = \frac{1}{3}$ vagy $x = -1$. Ami azt jelenti, hogy két olyan kör van, ami a feltételeknek megfelel, az egyik sugara $r_1 = \frac{1}{3}$, a másiké r_2 = 1. Az előbbi kör a felvett ábrának megfelelően a körcikk körívét a körcikken belül érinti, míg a másik kívülről. (A feladat természetesen más módokon is megoldható!)

M. 65. Egy trapéz egyik párhuzamos oldalának hossza 20 cm, a két szár hossza 13 cm, illetve 15 cm, a trapéz magassága 12 cm. Számítsa ki a trapéz területét!

M. 66. Egy derékszögű trapéz párhuzamos oldalai 8 és 10 cm hosszúak. Az alapokra nem merőleges szár hossza 4 cm. Mekkora a trapéz területe? Milyen távol van az átlók metszéspontja a merőleges szár végpontjaitól?

M. 67. Adott körbe írt téglalap oldalainak aránya 1:2. Hány százaléka a téglalap területe a kör területének?

M. 68. Egy kör 120°-os középponti szögéhez tartozó húr hossza 8 cm. Mekkora a húrhoz tartozó körszelet területe?

M. 69. Egy rombusz oldalának hossza az átlók mértani közepe. Hányszorosa a hosszabb átló a rövidebb átlónak?

Megoldások az előző hétről

M. 65. Ha az adott adatoknak megfelelően elemzi a szerkesztést, akkor kiderül, hogy a feltételeknek négy trapéz felel meg. (Előjeles szakasszal is dolgozhatunk!) A trapéz másik párhuzamos oldalának 6, 16, 24 vagy 34 cm, a megfelelő területek így 156, 216, 264 vagy 324 cm^2.

M. 66. Az adatoknak pontosan egy trapéz felel meg. A trapéz magassága $2\sqrt{3}$ cm, a területe $18\sqrt{3}$ cm^2. Az átlók hossza $\sqrt{78}$ cm, illetve $4\sqrt{7}$ cm.

A kérdezett távolságok: $\frac{16}{9}\sqrt{7}$, illetve $\frac{5}{9}\sqrt{78}$ cm.

M. 67. Minden megfelelő alakzat hasonló egymáshoz. A kör sugarát egységnyinek választhatjuk. $\frac{160}{\pi}$%.

M. 68. $r = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{16}{9}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

M. 69. Ha a két átló $2e$, $2f$, az oldal a, akkor egyrészt $a^2 = e^2 + f^2$, másrészt $a^2 = 4ef$. A keresett arány $2 + \sqrt{3}$.