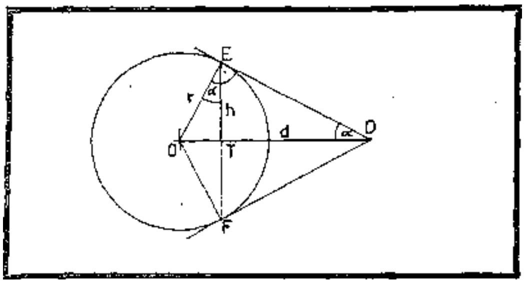
XV. GEOMETRIAI SZÁMÍTÁSI FELADATOK

Egyes feladatokban nem konkrét számértékekkel, hanem paraméterekkel, betűkkel adják meg az adatokat, és ezek függvényeként kell kifejezni a kérdezetteket.

a) Egy kör középpontjától d egység távolságra levő pontból érintőket húzunk a körhöz. Az érintési pontokat összekötő húr hossza $2h$ egység. Fejezzük ki a kör sugarát d-vel és h-val!



Természetesen most is előnyös, ha a szerkesztést és annak vizsgálatát átgondoljuk. (Ebből következik, hogy a megoldások száma 2, 1 vagy 0.)

Tegyük fel, hogy van megoldás, és készítsük el az elemző ábrát.

Távolságok meghatározására gyakran alkalmazzuk a területszámítást. Az OED háromszög területének kétszeresét felírhatjuk kétféle módon. Jelöljük a keresett kör sugarát r-rel, ekkor $ED = \sqrt{d^2 - r^2}$, $dh = r\sqrt{d^2 - r^2}$, amiből (1) $r^4 - d^2r^2 + h^2d^2 = 0$. Ennek diszkriminánsa $D = d^2(d^2 - 4h^2)$, amiből látható, hogy csak $0 < 2h < d$ esetén lehet megoldás. Ha $d = 2h$, akkor egyetlen kör van, és ennek sugara $r = \frac{d}{\sqrt{2}}$ egység, ha $2h < d$, akkor két megfelelő kör van, és ezek sugara $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 + d\sqrt{d^2 - 4h^2}}$, $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - d\sqrt{d^2 - 4h^2}}$.

Ha lehetséges, úgy célszerű a feladatokat különböző módszerekkel is megoldani. Most $OT = \sqrt{r^2 - h^2}$. Az OED derékszögű háromszögben alkalmazhatjuk a befogótételt, $r^2 = d\sqrt{r^2 - h^2}$, vagy a magasságtételt: $h^2 = \sqrt{r^2 - h^2}\left(d - \sqrt{r^2 - h^2}\right)$.

Alkalmazhatunk trigonometriát is. Látjuk, hogy $\sin\alpha = \frac{r}{d}$, $\cos\alpha = \frac{h}{r}$, így $\frac{r^2}{d^2} + \frac{h^2}{r^2} = 1$.

Mindhárom egyenlet az (1) egyenletre vezet.

M. 70. A c átfogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögben kijelölt P pontnak a befogóktól mért távolsága u, illetve v. Mekkora P távolsága az átfogótól ?

M. 71. Egy derékszögű háromszög egyik befogója a, a derékszög szögfelezője f egység. Fejezze ki a-val és f-fel a háromszög területét!

M. 72. Valamely kör köré írt húr-trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. A nem párhuzamos oldalak a kört az M, illetve N pontban érintik. Fejezze ki az MN távolságot a-val és b-vel!

M. 73. Az R sugarú kör egyik húrja a kör középpontjától d távolságra van. Fejezze ki R-rel és d-vel annak a húrnak a középponttól mért távolságát, amelyhez fele akkora ív tartozik, mint az előző húrhoz!

M. 74. Az ABC derékszögű háromszög befogói a és b. A O csúcsnál levő derékszög szögfelezője az AB átfogót a D pontban metszi. Húzzon párhuzamost az A csúcson át a CD szögfelezővel. Ez az egyenes a BC egyenest az E pontban metszi. Fejezze ki a $CDAE$ négyszög területét a-val és b-vel!

Megoldások az előző hétről

M. 70. Alkalmazhatunk területszámítást! Kössük össze a *P* pontot a háromszög csúcspontjaival. A kapott három részháromszög területének összege megegyezik a háromszög területével. A keresett távolság $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{c}{\sqrt{2}}-u-v\right)$.

M. 71. A szögfelező átfogón levő pontján át az adott befogóval húzzunk párhuzamost. Háromszögek hasonlóságának alkalmazásával kapjuk, hogy a másik befogó $b=\frac{af}{a\sqrt{2}-f}$ egység, a terület $\frac{a^2 f}{2\left(a\sqrt{2}-f\right)}$ erületegység.

(Dolgozhattunk volna a területszámítás alkalmazásával is.)

M. 72. Hasonló háromszögekkel dolgozhatunk. $MN=\frac{2ab}{a+b}$.

M. 74. $t=\frac{(2a+b)b^2}{2(a+b)}$.

Magyar Ifjúság 17.

XVI. TRIGONOMETRIA ALKALMAZÁSA A GEOMETRIÁBAN

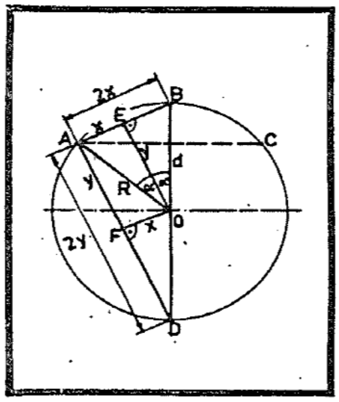
a) Egy háromszög két oldalának hossza $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, a háromszög területe $t = 12$ cm^2. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát!

Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög! Jelölje γ a c oldallal szemközti szöget. A terület kétszerese $24 = 5\cdot 8\cdot \sin\gamma$, azaz $\sin\gamma = \frac{3}{5}$. Ha γ hegyesszög, akkor $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, ha tompaszög, akkor $\cos\gamma = -\frac{4}{5}$, s most már cosinustétellel $c = 5$ cm vagy $c = \sqrt{153}$ cm. A feladatnak tehát két megoldása van (amit ellenőrizhetünk).

Dolgozhatunk előjeles szakasszal is. Mivel a b oldalhoz tartozó magasság 3 cm, ezért a szerkesztés vizsgálatából is kiderül, hogy két megoldás van, és így trigonometria alkalmazása nélkül is dolgozhatunk.

A **XV/a** példa megoldása során láttuk, hogy geometriai számítási feladatok során alkalmazhatunk trigonometriát.

Ezt megtehetjük az **M. 73.** megoldásánál is.



Az adott húrhoz két ív tartozik, így két távolságot keresünk. Az ábrából leolvasható állítások igazolhatók. (Igazolják!)

$x = R\sin\alpha$, $y = R\cos\gamma$. Mivel $\cos 2\alpha = \frac{d}{R}$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, ezért $x = R\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{R(R-d)}{2}}$ és

$$y = R\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{R(R+d)}{2}}.$$

Természetesen alkalmazhatnánk az ABD derékszögű háromszögben a befogó tételt mindkét befogóra $[4x^2 = 2R(R-d),\ 4y^2 = 2R(R+d)]$.

Megoldhatjuk a feladatot egyenletrendszerrel is, hiszen $x^2 + y^2 = R^2$ és $2x\cdot 2y = 2R\sqrt{R^2-d^2}$.

b) Egy háromszögben $\alpha - \beta = \beta - \gamma = 45°$. Igazoljuk, hogy $a + b = b\sqrt{2}$.

A feltételből $2\beta = \alpha + \gamma = 180° - \beta$; $\beta = 60°$, $\alpha = 105°$ és $\gamma = 15°$. Első módszerként a sinus-tételt alkalmazhatjuk.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{\sin 105° + \sin 15°}{\sin 60°} = \sqrt{2}$, hiszen $\sin 105° = \sin 75°$ és $\sin 75° + \sin 15° = 2\sin 45°\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Egy másik megoldási mód az, hogy megfelelő ábrát készítünk. Gélszerű olyan ábrát létrehozni, amelyben az $a + c$ szakasz szerepel. Az ABC háromszög AB oldalát hosszabbítsuk meg B-n túl a-val, a végpont D. A DBC háromszög egyenlőszárú, a B-nél levő külső szög 60°, így az alapon fekvő, D és C csúcsnál levő szögek 30°-osak. Az ADC háromszögben tehát $AD = a + c$, $AC = b$, a C csúcsnál levő szög 45°, a D csúcsnál 30°. Így $\frac{a+c}{b} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} = \sqrt{2}$

M. 75. Az ABC háromszögben AB = 10 cm, BO = 8 cm, és az A csúcsnál levő szög α = 30°. Mekkorák a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

M. 76. Az $ABCD$ konvex négyszögben AB = 3, BC = 5, CD = 5, DA = $2\sqrt{6}\,2$ egység. A B csúcsnál levő szög 120°. Számítsa ki az AC átlót, a D csúcsnál levő szöget és a négyszög területét!

M. 77. Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire teljesül, hogy $2\cos\alpha\sin\beta = \sin\gamma$, akkor a háromszög egyenlőszárú!

M. 78. Egy háromszögben $a + c = 2b$, $\gamma = \alpha + 60°$. Számítsa ki $\cos\beta$ értékét!

M. 79. Egy háromszög két oldala a = 10, b = 16, e két oldal által bezárt szög szögfelezője 12 egység. Mekkora a harmadik oldal?

M. 80. Számítsa ki az ABC háromszög körülírt körének sugarát, ha AC = 8 cm, BC = 12 cm, és az AC húr F felezőpontja 2 cm távolságra van az AB egyenestől!

Megoldások az előző hétről

M. 75. A szerkesztés vizsgálatából kiderül, hogy két megoldás van. A sinus-tétel alkalmazása révén $\sin\gamma = \frac{10}{8}\cdot\sin 30°$, $\sin\gamma = 0{,}625$. Ebből $\gamma_1 = 38°41'$, $\beta_1 = 111°19'$, AC_1 = 14,9 cm; $\gamma_2 = 141°197$, $\beta_2 = 8°41'$, AC_2 = 2,4 cm.

M. 76. AC = 7 egység, a D csúcsnál levő szög 90°, a terület $t = 5\sqrt{6} + \frac{15\sqrt{3}}{4}$ területegység.

M. 77. 1. megoldás. $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ alkalmazásával belátható, hogy $\alpha = \beta$, így igaz az állítás. 2. megoldás. A sinus- és cosinus-tétel alkalmazásával $a = b$ adódik.

M. 78. A **XVI/b.** példa módszereit alkalmazhatjuk. $\cos\beta = \frac{5}{8}$.

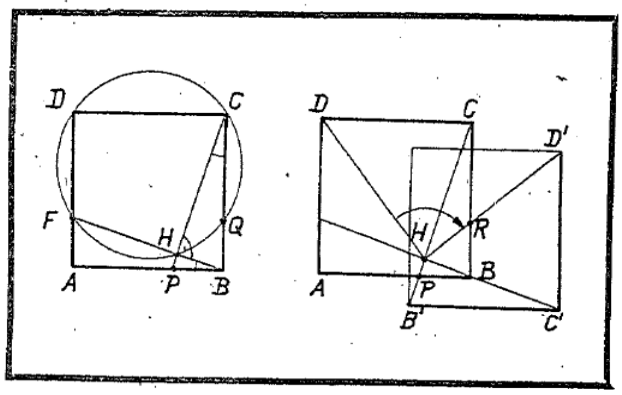
M. 79. A szögfelező osztásarány tétele alkalmazásával a harmadik oldal két része $5t$, illetve $8t$. A két részháromszögben alkalmazhatjuk az $5t$, $7t$ oldalakra a cosinus-tételt. Innen $t = \frac{2}{\sqrt{10}}$ adódik, amiből $c = 13t = \frac{26}{\sqrt{10}}$.

M. 80. Két ilyen kör van, r_1 = 6,5 cm, r_2 = 19,3 cm.

XVII. GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSI FELADATOK

A geometriai bizonyítási feladatok megoldása a megismert fogalmak, tételek ismeretén kívül figyelmet, logikus gondolkodást, találékonyságot igényel. A feladatoknak nincsen általános megoldási módszere. Mindenesetre célszerű, ismerni a tételek, feladatok bizonyítása során a középiskolában alkalmazott módszereket, mert ezeket vagy ezekhez hasonlókat lehet alkalmazni. A jól elkészített ábra a feladat megértésében segít és a bizonyításhoz ötleteket sugallhat. A bizonyítás során a feltevésből kiindulva különböző tételek felhasználásával, logikai úton a bizonyítandó állításhoz kell eljutnunk.

a) Az *ABCD* négyzet *AB* oldalán levő *P* és a *BC* oldalán levő *Q* pont a *B* ponttól egyenlő távolságra van (*BP* = *BQ*). A *B* csúcson átmenő, *PC*-re merőleges egyenes *PC*-t a *H*, az *AD* oldalt az *F* pontban metszi. Igazolja, hogy a *DHQ* szög derékszög!



A *PBC* és az *FAB* derékszögű, háromszögek egybevágók; hiszen *AB* = *BC,* valamint a *PCB* és az *FBA* szögek is egyenlők. így *FA* = *PB, FD* = *CQ,* azaz az *FDCQ* téglalap. A téglalap köré írt kör két átmérője *FC* és *DQ.* A *H* pont rajta van a téglalap köré írt körön, hiszen *FHC* szög derékszög. A *DHQ* szög a *DQ* átmérőn nyugvó kerületi szög, tehát derékszög.

Alkalmazhatunk geometriai transzformációt is a bizonyítás során. Forgassuk el a *H* pont körül 90°-kal a síkot úgy, hogy a *HB* félegyenesnek a *HP* félegyenes feleljen meg. A *HD* szakasznak megfelelő *HD'* a *BC* oldalt messe az *R* pontban. Az ábra jelölése szerint

$$\frac{B'C'}{PB}=\frac{HC'}{HB}=\frac{C'D'}{BR}.$$

Mivel *B'C'* = *C'D'*, ezért *PB* = *BR*, azaz a *Q* és az *R* pontok egybeesnek. A *DHR* szög a 90°-os forgatás révén derékszög, tehát igaz az állítás.

M. 81. Adott az *ABC* és az AB_1C_1 (közös *A* csúcspontú) egyező körüljárású, egyenlő oldalú háromszög. Igazolja, hogy $BB_1 = CC_1$, és határozza meg a BB_1 és CC_1 egyenesek szögét!

M. 82. Az *ABCD* érintőnégyszög beírható körének középpontja *O.* Igazolja, hogy az *AOB* és *COD* szögek összege 180°!

M. 83. Az *ABC* háromszögön belül vegyünk fel egy tetszés szerinti *O* pontot. Az *O* ponton át a háromszög oldalaival húzzunk párhuzamos egyeneseket. Ezek az egyenesek az *ABC* háromszöget hat részre osztják, melyek közül 3 háromszög. Legyen e háromszögek területe t_a, t_b, t_c, az adott háromszög területe *t.* Igazolja, hogy $t=\left(\sqrt{t_a}+\sqrt{t_b}+\sqrt{t_c}\right)^2$.

M. 84. Az *ABC* hegyesszögű háromszögben húzzuk meg az *A* csúcshoz tartozó magasságot (*AD*), a *B* és a *C* csúcshoz tartozó szögfelezőt. A *BAD* szög szögfelezője *AE,* a *DAC* szög szögfelezője *AF. A B* csúcshoz tartozó szögfelező *AE*-t a *T*, *AF*-et a *V* pontban, a *C* csúcshoz tartozó szögfelező *AF*-et az *U*, *AE*-t az *S* pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy az *STUV* négyszög húrnégyszög!

M. 85. Legyen a szokott jelölés szerint az *ABC* háromszög három oldala *a, b, c*, a szemben fekvő szögek α, β, γ. Igazolja, hogy α = 2β akkor és csak akkor teljesül, ha $a^2 = b(b + c)$. (Ahhoz, hogy α = 2β teljesüljön, szükséges és elégséges, hogy $a^2 = b(b + c)$ fennálljon!)

Megoldások az előző hétről

M. 81. Ha a BAB_1 háromszöget az *A* pont körül (a körüljárás irányában) 60°-kal elforgatjuk, akkor a vele egybevágó CAC_1 háromszöget kapjuk, s így $BB_1 = CC_1$, és a kérdéses szög 60°.

M. 82. Jelölje 2α, 2β, 2γ, 2δ az *A, B, C* és *D* csúcsnál levő szögeket. A négyszög szögeinek szögfelezői az *O* pontban metszik egymást. Így $AOB\angle = 180° - (\alpha + \beta)$, $COD\angle = 180° - (\gamma + \delta)$. Mivel α + β + γ + δ = 180°, ezért igaz az állítás.

M. 83. A keletkezett háromszögek az adott *ABC* háromszöghöz hasonlók, így a megfelelő oldalak aránya megegyezik a területek négyzetgyökének arányával, Az *ABC* háromszög egy oldalának hossza egyenlő a három háromszög ezen oldallal párhuzamos oldalának összegével, így $\sqrt{\frac{t_a}{t}} + \sqrt{\frac{t_b}{t}} + \sqrt{\frac{t_c}{t}} = 1$, amiből adódik az állítás.

M. 84. Jelölje 2β a háromszög *B* csúcsánál levő szögét. Ekkor az *ABT* szög β, a *BAT* szög = $\frac{1}{2}(90° - 2\beta)$ = 45° – β. Az *STV* szög az *ATB* háromszög külső szöge, így egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, 45°-kal. Hasonlóan . adódik, hogy az *SUV* szög is 45°-os. Mivel az *STUV* négyszög *SV* oldala a másik két csúcsból egyenlő szög alatt látszik, ezért valóban húrnégyszög.

M. 85. A feltétel elégséges. Ugyanis ha $a^2 = b(b + c)$, akkor valóban α = 2β. Vegyük fel a *CA* egyenesen a *D* pontot úgy, hogy az *A* a *C* és *D* között legyen, és *AV* = *c*. A feltétel szerint $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$.

Az *ACB* és *DCB* háromszögek hasonlók, hiszen két oldal aránya és a közbezárt γ szög egyenlő. A *DAB* egyenlőszárú háromszögben az *ADB* szög egyrészt β-val, másrészt $\frac{\alpha}{2}$-vel egyezik meg, tehát α = 2β.

A .feltétel szükséges, hiszen ha α = 2β, akkor $a^2 = b(b + c)$. Lássa be!

XVIII TÉRGEOMETRIAI FELADATOK

Térgeometriai számítási feladatok megoldását síkgeometriai számítási feladatok megoldására igyekszünk visszavezetni. Célszerű alkalmasan választott síkmetszetekkel dolgozni. Tekintsék át a megismert felszín- és térfogatszámítási képleteket!

a) Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara szintén 12 cm. Mekkora annak a hengernek a felszíne és térfogata, amelynek alapköre a kúp alaplapján, fedőlap köre pedig a kúp palástján van, ha a henger magassága alapkörének átmérőjével egyezik meg?

Az alakzatnak végtelen sok szimmetriasíkja van. .Egy ilyen szimmetriasík az alakzatból egy 24 cm alapú, 12 cm magasságú, egyenlőszárú, tehát derékszögű háromszöget metsz ki, amelybe olyan négyzet van beírva, amelynek oldala a henger átmérőjével, $2r$-rel egyezik meg. Így $3 \cdot 2r = 24$, $r = 4$ cm. A henger .felszíne $F = 6r^2\pi = 96\pi$ cm^2, térfogata $V = 2r^3\pi = 128\pi$ cm^3.

M. 86. Egy kúp palástja olyan körcikk, amelynek sugara $a = 15$ cm, középponti szöge 216°. Számítsa ki a kúp felszínét és térfogatát! A kúp csúcsától mekkora távolságban metsz ki a kúpból egy alappal párhuzamos sík 9π cm^2 területű kört?

M. 87. A D csúcsú szabályos gúla alaplapja a oldalú ABC háromszög, az oldallapok D-ben derékszögűek. Fejezze ki a-val a gúla térfogatát! Az AD él felező pontja E, a BC él felezőpontja F. Fejezze ki a-val az EF szakasz hosszát! Határozza meg a DEF szög (α) valamelyik szögfüggvényét!

M. 88. Az ABC derékszögű háromszög átfogója $AB = 4$ cm, az A csúcsnál levő szög 30°. Az AB-vel párhuzamos, tőle d cm távolságra haladó egyenes AC-t az E, BC-t az F pontban metszi. Forgassuk meg az $AEFB$ trapézt az AB oldala körül! Fejezze ki d- vel e forgástest felszínét! Határozza meg d értékét úgy, hogy e felszín $3\pi\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm^2 legyen! Számítsa ki ez esetben a forgástest térfogatát is!

M. 89. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 2 dm, a szomszédos oldallapok szöge 120°. Számítsa ki a gúla magasságát!

Megoldások az előző hétről

M. 86. Legyen a kúp alapkörének sugara *r*. A kúp alkotója 15 cm. A palástfelszín egyrészt $r\pi \cdot 15$, másrészt $\frac{15^2\pi \cdot 216}{360}$, amiből $r = 9$. A kúp magassága $m = 12$ cm, a térfogata $V = 324\pi$ cm^3, a felszíne 216π cm^2. A kúp csúcsától a kérdéses sík 4 cm távolságban halad.

M. 87. Az oldallapok (egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszögek) átfogója *a*, így minden él $\frac{a}{\sqrt{2}}$ hosszú. A gúla magassága $\frac{a}{\sqrt{6}}$. A gúla térfogata $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3\sqrt{6}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. Mivel *ED* merőleges *DB* és *DC*-re, ezért merőleges a *DBC* sík minden egyenesére, így *DF*-re is. Az *EFD* derékszögű háromszög két befogója $ED = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, $DF = \frac{a}{2}$, így $EF = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

M. 88. Legyen az *E*, illetve az *F* vetülete az *AB* átfogón E_1, illetve F_1. Mivel $EE_1 = FF_1 = d$, ezért $AE = 2d$, $AE_1 = d\sqrt{3}$, $FB = \frac{2d}{\sqrt{3}}$, $F_1B = \frac{d}{\sqrt{3}}$, így $E_1F_1 = EF = \frac{4}{3}\left(3 - d\sqrt{3}\right)$. A forgástest felszíne $F = 2\pi d^2 + 2\pi d.\ \frac{4}{3}\left(3 - d\sqrt{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} d^2\pi = 2\pi\left(\left(1 - \sqrt{3}\right)d^2 + 4d\right)$ cm^2. A feltétel szerint $2\pi\left(\left(1 - \sqrt{3}\right)d^2 + 4d\right) = 3\pi\left(\sqrt{3} + 1\right)$, ahol $0 < d < \sqrt{3}$. Így $d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$. A forgástest térfogata $V = \frac{2\pi}{9}\left(9 + 4\sqrt{3}\right)$ cm^3.

M. 89. Legyen az alaplap az *ABCD* négyzet, az átlók metszéspontja *F*, a gúla ötödik csúcsa *E*. Tekintsük az *EB* élben találkozó oldallapokat. Az *AC* átlóra illeszkedő, *EB* élre merőleges sík az *EB* élt a *T* pontban metszi. Az *ATC* szög 120°. Az *FTC* derékszögű háromszögben az $FC = \sqrt{2}$, a vele szemközti szög 60°, így $FT = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Az *FTB* derékszögű háromszögben a *B*-nél levő szög β, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A gúla magassága $FE = FB \cdot \mathrm{tg}\beta = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$.

Magyar Ifjúság 20.

Sorozatunk végéhez értünk. Mint ahogyan a bevezetőben is írtuk, igyekeztünk segítséget nyújtani a felkészüléshez, tudva azt, hogy ez a segítség alapvető, de nyilván nem elegendő. Ajánljuk, nézzék át még egyszer a legfontosabb anyagrészeket és egy utolsó erőpróbaként oldják meg a most kitűzött feladatsorozatot. (Ennek tömör megoldásait, eredményeit a lap más helyén, a 36. oldalon megtalálják!)

M. 90. Egy paralelogramma átlói 60°-os szöget zárnak be. Az átlók együttes hossza 28 cm, a rövidebb oldal hossza $2\sqrt{13}$ cm. Számítsa ki a paralelogramma területét és másik oldalának hosszát!

M. 91. Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\left(x^2+2x+1\right)\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)=0$;

b) $\sqrt{(3-x)^2}=x-3$;

c) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$;

d) $\lg(4^{4x}-2)=\lg(16^{2x}-2)$.

M. 92. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x + y = 0$ egyenletű egyenest az origóban érinti és érinti az $y - x = 2$ egyenletű egyenest is!

M. 93. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme eggyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és hárommal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írja fel mindkét sorozat első három elemét!

M. 94. Oldja meg a

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot 2^{x}-2^{x+y}+2=0\\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y-1}=16\end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

M. 95. Az *ABC* háromszög köré írt kör *C* pontjában húzott, érintő az *AB* egyenest az *M* pontban metszi. A *CMA* szög szögfelezője *CA*-t *D*-ben, *CB*-t *E*-ben metszi. Igazolja, hogy *CD* = *CE*!

M. 96. Határozza meg az *a* értékét úgy, hogy a

$$\left.\begin{array}{l}2x^2-y^2=-a^2+a-2,\\ x+y=a\end{array}\right\}$$

egyenletrendszernek legyen megoldása a valós számok körében! Milyen *a* esetén van egy megoldása az egyenletrendszernek? Oldja meg ez esetben az egyenletrendszert!

M. 97. Az *ABC* háromszögben *AB* = 5 cm, *AC* = 3 cm, *CD* = 2,5 cm, ahol *D* az *AB* oldal felezőpontja. Az *ADC*, illetve a *BCD* háromszögbe írt kör középpontja O_1, illetve O_2. Számítsa ki az O_1O_2 távolságot!

Megoldások az előző hétről

(Az alábbiakban ismertetjük a 26. oldalon közölt feladatok megoldásait.)

M. 90. Ha az egyik átló fele e, akkor a másik átló fele $14 - e$, így cosinustétellel kaphatjuk, hogy $e = 6$ cm vagy $e = 8$ cm. $t = 48\sqrt{3}$ cm^2, a másik oldal hossza $2\sqrt{37}$ cm.

M. 91. a) $x = -3$. b) Ha $|x - 3| = x - 3$, azaz $x \geq 3$. c) $\text{tg}^2 x = 3$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol k egész szám.

M.92. Két ilyen kör van, egyenletük $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$, illetve $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

M. 93. A számtani sorozat első három eleme 1, 2, 3, a mértani sorozaté 1, 2, 4.

M. 94. $x = 1$, $y = 2$.

M. 95. Az ADM és a CEM szögek egyenlők, így a kiegészítő CDE és CED szögeik is, amiből következik, hogy $CD = CE$.

M. 96. Helyettesítő módszerrel az $x^2 + 2ax + 2 - a = 0$ egyenlethez jutunk. Akkor van az egyenletrendszernek megoldása a valós számok körében, ha ennek diszkriminánsa nem negatív.

$D = 4(a+2)(a-1) \geq 0$, ha $a \leq -2$ vagy $a \geq 1$.

Egy (kettős) megoldás van, ha $a = -2$ vagy $a = 1$.

A megoldás ekkor $x_1 = 2$, $y_1 = -4$, illetve $x_2 = -1$, $y_2 = 2$.

M. 97. Az ABC háromszög derékszögű! Az ADC és BDC háromszögek egyenlőszárúak. A D merőleges vetülete az AC befogón legyen E, a BC befogón F. O_1 az ED-re, O_2 az FD-re illeszkedik. ED a CB befogó fele: 2 cm, FD az AC befogó fele: 1,5 cm. Az AED derékszögű háromszög A csúcsánál levő szög szögfelezője ED-t O_1-ben metszi, így $O_1D = 2 \cdot \frac{5}{5+3} = \frac{5}{4}$ cm. Hasonlóan $O_2D = \frac{5}{6}$ cm. Az O_1DO_2 háromszög derékszögű, $O_1O_2 = \frac{5}{12}\sqrt{13}$ cm.