

Magyar Ifjúság – Készüljünk együtt a felvételre! II. rész

Az első részt a Magyar Ifjúság február 3-i számában közöltük

Szóbeli feladatsorok

Az egyetemi-főiskolai felvételi vizsgák írásbeli és szóbeli részből állnak. A matematika és fizika írásbeli vizsgát az egész országban már több mint tíz éve egy meghatározott napon szervezik. Minden vizsgázónak ugyanazt a központilag összeállított feladatsort kell megoldania. Néhány éve e két tárgyból írt felvételi dolgozat egyben az érettségi dolgozata azoknak, akik a felvételi évében fejezik be középiskolai tanulmányaikat. A Magyar Ifjúság ez évi 5. számában közölt feladatsorozatokkal az írásbeli vizsga követelményszintjét kívántuk megmutatni. Matematikából a felvételi példákhoz hasonló összeállítást készítettünk, fizikából az utóbbi években kitűzött írásbeli feladatokat adtuk közre. Aki azt az anyagot áttanulmányozza, biztos tudja majd, hogy mire számíthat az írásbeli felvételi vizsgán.

Sokkal nehezebb ugyanilyen igényrel a szóbeli vizsgákról beszélni, mert az egyes felsőoktatási intézmények vizsgáztatási gyakorlata nem egységes. Van olyan egyetem, ahol tételesen kérdeznek. Másutt a szóbeli vizsgán is feladatok szerepelnek. Több intézményben tétel és példa is kerül a papírra. Fizikából sorra kerülnek a „kvalitatív feladatok”, vagy ismertebb nevükön a „gondolkodtató kérdések”. Az ilyen kérdés megválaszolása jó fizikusszemléletet igényel, érdemes már a felkészülés során foglalkozni velük. Ilyen jellegű feladatok a mostani anyagban a hármas csoportokon belül az elsők, amelyeket **a)** betűvel jelöltünk. Eltérés van abban is, hogy van vagy nincs felkészülési idő. A bizottság joga, hogy megválassza a kérdezés módját.

Sok vizsgázó esik abba a hibába, hogy a tétellapon szereplő feladatot ugyanúgy meg akarja oldani, mint ahogy az írásbeli vizsgán kell. Erre a szóbelin nincs idő. A példa azonban jó lehetőséget nyújt a vizsgáztatónak, hogy megítélje a jelentkező gondolkodóképességét, ötletességét, készségét az ismeretek alkalmazására, egyszóval a felsőfokú tanulmányokra való alkalmasságát. Ezért a jó vizsgázó nem törekszik a feladatok részletes kidolgozására, hanem először is igyekszik alaposan megérteni a feladatot, összefüggéseket keres az adatok és az ismeretlen között, pontosan felidézi magában az alkalmazandó törvényeket, tételeket és csak a tervét készíti el a megoldásnak. Ha így készül fel, nem jön zavarba a vizsgáztató kérdéseitől.

A mostani anyagban úgy csoportosítottuk a feladatokat, ahogy azokkal szóbeli tétellapon találkozhatunk. Matematikából egy egységbe két, fizikából három példa került. A kitűzött feladatok után mi is feltettünk kérdéseket, ahogy a vizsgáztató tanárok is kérdeznek. Ezek a kérdések egyes esetekben segítik a feladat megoldását, más esetekben a felvetett problémával kapcsolatos elméleti anyagok. Próbáljon a kérdésekre válaszolni! Ha nem tud, nézzen utána a tankönyvben, esetleg kérjen segítséget tanárától.

M. 1.

a) Igazolja, hogy ha az $ax^2 - 3bx + 9c = 0$, $a \neq 0$ egyenlet két gyöke egyenlő, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei is egyenlők! Igaz-e az állítás megfordítása?

(Mit ért az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenlet diszkriminánsán? Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy másodfokú egyenlet két gyöke egyenlő legyen? Mi a megfordítása a következő állításnak: „Ha A igaz, akkor B is igaz.”)

b) Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $y = x^3 - a^2x$ egyenletű görbe $x = 0$ és $x = a$ abszcisszájú pontjában húzott érintők egymásra merőlegesek legyenek!

(Hogyan határozható meg az $y = f(x)$ egyenletű vonal $x = x_0$ pontjában az érintő iránytangense? Mikor létezik az érintő?)

M. 2.

a) Egy háromszög legnagyobb oldala a legkisebb oldalának háromszorosa. Határozza meg a háromszög harmadik oldala és a hozzá tartozó szögfelező arányát, ha a két oldal által bezárt szög 60° !

(Hogyan bizonyítaná be a cosinustételt?)

b) Vázolja az

$$y = \frac{4 - 2^{2x}}{2 - 2^x}$$

függvény grafikonját! Milyen x esetén veszi fel a függvény a 3, a 4, illetve az 5 értéket?

(Milyen számokra értelmezett az $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) exponenciális függvény? Mit tud a függvény monotonitási tulajdonságáról?)

M. 3.

a) Az ABC háromszög BC oldalát hosszabbítsuk meg a C ponton túl $CD = BC$ szakasszal. A C ponton át az AB -vel, a D ponton át az AC -vel húzott párhuzamos egyenesek metszéspontja E . Igazolja, hogy az ACE és az ABC háromszögek egybevágók! Igaz-e, hogy az AD és a BE egyenesek S metszéspontja az ACE háromszög súlypontja?

(Hogyan igazolná, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást?)

b) Figyelje a következő egyenlet alábbi megoldását:

$$,,\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0; \quad \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0;$$

$2 \operatorname{tg}^2 x + 1 - \operatorname{tg}^2 x = 0; \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$. Az egyenletnek tehát nincs megoldása."

Ellenőrizze, hogy $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ megoldása az egyen-

letnek!

Mi a véleménye az itt leírtakról?

(Milyen szögek körében érvényesek a

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ azonosságok?})$$

M. 4.

a) Milyen a érték esetén van valós gyöke az $x^2 + 2x = ax + 2a$ egyenletnek? Milyen a érték esetén egyezik meg a gyökök előjele? A gyökök négyzetének összege a milyen értéke esetén a legkisebb?

(Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet együtthatóival fejezze ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az egyenletnek legyen valós gyöke és a gyökök

a) legyenek egyező előjelűek;

b) legyenek különböző előjelűek;

c) legyenek különböző előjelűek és a negatív előjelű gyök legyen nagyobb abszolút értékű!)

b) Az $ABCD$ egyenlőszárú trapéz AB alapján fekvő szögek nagysága 45° . Az AD szár hossza a CD alappal egyező. Legyen $CD = a$. Forgassa meg a trapézt az AD szár egyenesese körül 360° -kal! Fejezze ki a -val a keletkezett forgástest térfogatát!

(Hogyan számítható ki a kúp, illetve a csonkakúp térfogata? Hogyan igazolhatók a képletek?)

M. 5.

a) Tekintsük az $y = \lg(x+4) - \lg(x^2+3x-4)$, minden megengedett x -re értelmezett függvényt. Milyen x -ekre értelmezett a függvény? Vázolja a függvény grafikonját!

(Mit tud az $y = \log_a x$ függvényről? Hogyan néz ki a függvény grafikonja, ha $a > 1$, és hogyan, ha $0 < a < 1$?)

b) Határozza meg az a értékét úgy, hogy az $x^2 - ay^2 - 2ux - 2uy = 0$ egyenlet kör egyenlete legyen az (x, y) síkon! Hogyan helyezkednek el ezek a körök, ha u paraméter? A körök közül melyik megy át a $P(2; 2)$ ponton?

(A kör egyenlete milyen kétismeretlenes egyenlet? Egy kétismeretlenes egyenlet mikor lehet kör egyenlete? Mikor valóban az?)

M. 6.

a) Egy sorozat n . eleme ($n = 1, 2, 3, \dots$) $a_n = 2n + 3$. Határozza meg a sorozat első n elemének összegét, S_n -t! Tudjuk, hogy

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Fejezze ki n -nel az $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ összeget!

(Milyen sorozatot nevezünk számtani sorozatnak? Hogyan határozhatjuk meg a sorozat első n elemének összegét? Van-e olyan számtani sorozat, amelyik korlátos?)

b) Egy háromszög területe $T = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, ahol

a , illetve b a háromszög két oldalának hossza. Számítsa ki a háromszög szögeit!

(Trigonometrikus függvények alkalmazásával hogyan számítható ki a háromszög területe? Igazolja a képletet!)

M. 7.

a) Oldja meg a

$$\sqrt{2} \cos x \cdot \operatorname{ctg} x + \sqrt{6} \cos x - \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$$

egyenletet! (Alakítson szorzattá! Hogyan értelmezik a $\operatorname{ctg} x$ függvényt? Mi a függvény periódusa? Hogyan változik a függvény értéke, ha x 0-tól π -ig nő?)

b) Számítsa ki az $y = x^2$ és az $x + y = 2$ egyenletű vonalak által határolt (korlátos) síkidom területét!

(Mit értünk az $f(x)$ függvény $[a; b]$ intervallumra vonatkozó határozott integrálján?)

M. 8.

a) Határozza meg az a értékét úgy, hogy az $A(-1; -3-a)$, a $B(3; 3a+1)$ és a $C(4-a; 2a+2)$ pontok egy egyenesre essenek! Írja fel ezen egyenes egyenletét!

(Milyen összefüggés van a $v(v_1; v_2)$ és $v'(v'_1; v'_2)$ vektorok koordinátái között, ha azok párhuzamosak? Hogyan kapjuk a $v+v'$, illetve a $v-v'$ koordinátáit?)

b) Adott a síkon az AB szakasz. Hol helyezkednek el a síkon azon ABC háromszögek C csúcspontjai, amelyekben a BC oldal egyenlő a hozzá tartozó AA' magassággal?

(Hogyan szól Thales tétele és megfordítása? Hogyan igazolná ezeket?)

M. 9.

a) Igazolja, hogy az $5x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$, x -re másodfokú egyenletnek minden a valós paraméter esetén van valós megoldása! Van-e olyan a , amelyre az egyenlet két gyöke egymás reciproka, illetve egymás ellentettje?

(Mi a feltétele annak, hogy egy másodfokú egyenletnek legyen valós gyöke? Milyen összefüggéseket ismer a másodfokú egyenlet együtthatói és gyökei között?)

b) 1. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó szögfelező f , a befogók aránya 4:7. Fejezze ki f -vel a befogókat!

2. Ha f adott szakasz és ismert a befogók aránya, hogyan szerkeszteni meg a derékszögű háromszöget?

(Mivel adjuk meg a középpontos hasonlóságot és milyen tulajdonságai vannak?)

M. 10.

a) Oldja meg az

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= 14x + 14y - 49 \\ x + y &= 13 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer!

Fejezze ki $x^2 + y^2$ -et $x + y$ és xy segítségével!

(Mi a grafikonja a következő kétismeretlenes egyenleteknek:

$$x + y = a, \quad xy = b, \quad x^2 + y^2 = c?)$$

b) Oldja meg a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x) < 1$$

trigonometrikus egyenlőtlenséget!

(Igazolja a $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ és a $\sin x = -\cos(\pi - x)$ azonosságokat! Vázolja az $y = \cos x$ függvény grafikonját!)

M. 11.

a) Bontsa fel 1978-at két olyan pozitív szám összegére, hogy a tagok szorzata a legnagyobb legyen!

(Milyen egyenlőtlenség érvényes két pozitív szám számtani és mértani közepe között? Hogyan igazolható? Mikor egyenlő a számtani és a mértani közép?)

b) Határozza meg közelítő értékek alkalmazása nélkül a $\cos 2x$ és a $\sin 2x$ értékét, ha $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$!

(Milyen szögekre érvényesek a következő azonosságok?)

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}?$$

Hogyan igazolhatók a következő azonosságok:

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

ha $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$?)

M. 12.

a) Adott az e egyenes és az egyik oldalán két pont, A és B . Az ABE háromszögek közül melyiknek a legkisebb a kerülete, ha E végigfut az e egyenesen?

(A tengelyes tükrözés milyen tulajdonságait ismeri? A tengelyes tükrözés során mely egyenesek képe önmaga?)

b) Egy rombusz két szemközti csúcsa $A(-2; 1)$ $C(6; 7)$. A rombusz területe 25 területegység. Határozza meg a rombusz másik két csúcspontjának koordinátáit!

(Hogyan számítható ki egy négyszög területe, ha ismert a két átlója és az átlók által bezárt szög? Két vonal közös pontjainak koordinátái hogyan számíthatók ki? Miért?)

M. 13.

a) Bizonyítsa be, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor $\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$!

Az α, β, γ szögekre teljesül a $\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ összefüggés. Következik-e ebből, hogy van olyan háromszög, amelynek szögei α, β, γ ?

(Igazolja a következő azonosságokat:

$$\sin x = \sin (180^\circ - x); \sin x = -\sin (x - 180^\circ);$$

$$\sin x = -\sin (-x).$$

b) Azok közül a forgáshengerek közül, amelyeknek a teljes felszíne $48\pi \text{ cm}^2$, melyiknek a térfogata a legnagyobb?

(Mit értünk az $f(x)$ függvény x_1 helyen vett differenciálhányadosán?

Mely x helyen lehet helyi szélsőértéke a differenciálható $f(x)$ függvénynek? Mely x helyen van helyi szélsőértéke a differenciálható $f(x)$ függvénynek?)

M. 14.

a) Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 pozitív számok egy-egy mértani sorozat három-három egymás után következő eleme. Igazolja, hogy ha $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$ szintén egy mértani sorozat három egymás után következő eleme, akkor $a_1 b_3 = a_3 b_1$!

(Mikor nevezünk egy sorozatot mértani sorozatnak? Milyen tulajdonsága van a mértani sorozatnak? Hogyan számítható ki a mértani sorozat első n elemének összege, ha ismerjük a sorozat első elemét és hányadosát?)

b) Egy dolgozatban a $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -1$ egyenlet „megoldása” a következő:

$$\sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 x} = \cos x - 1.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$$3(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 2 \cos x + 1,$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

$$\cos x = 1 \text{ vagy } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Ha $\cos x = 1$, akkor $x = 2k\pi$, és ez megoldása az adott egyenletnek is, hiszen ekkor $\sin x = 0$. Ha

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \text{ akkor } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ vagy}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi. \text{ Az } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ megoldása az}$$

$$\text{egyenletnek } \left(\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \right), x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ nem, hiszen ekkor}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq -1."$$

Mi a véleménye a „megoldásról”? Mondja el róla mindazt, amit jónak tart! Van-e hiba a megoldásban?

Végeztünk-e olyan lépéseket, melyeknek során gyököt nyertünk, vagy vesztettünk? Szabad-e ilyen lépéseket végeznünk?

(Mit tud az $y = \cos x$ függvényről? Hogyan kapja az $y = \cos x$ függvény grafikonjából az $y = 2 \cos^2 x - 1$ függvény grafikonját?)

M. 15.

a) Vázolja az $y = x^2 - 2x - 3$ függvény grafikonját, ha az minden valós x -re értelmezett! Oldja meg a $2^{x^2} < 2^{2x+3}$ egyenlőtlenséget!

(Mit tud az $y = a^x$ exponenciális függvényről? Az a milyen értéke esetén szigorúan monoton növekedő, illetve csökkenő a függvény?)

b) A C -ben derékszögű ABC háromszög átfogójához tartozó magasság CD . Igazolja, hogy az ADC háromszög AM és a CDB háromszög CN súlyvonalainak egyenesei merőlegesek egymásra!

(Húzza meg egy derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságot! Mely háromszögek hasonlók egymáshoz? Milyen tételeket bizonyítottak a kapott hasonló háromszögek alkalmazásával? Mondjon elégséges feltételeket ahhoz, hogy két háromszög hasonló legyen!)

M. 16.

a) Oldja meg az

$$(y^2 - y + 1) \lg x^2 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 5) \lg y = 0$$

egyenletrendszert!

(Mit jelent megoldani egy kétismeretlenes egyenletrendszert? Milyen tanácsokat tudna adni egy exponenciális vagy logaritmikus egyenletrendszer megoldásához? Mit jelent egy kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása?)

b) A $P(2; 4)$ ponton átmenő egyenesek közül melyek érintik az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kört?

(Adott ponton átmenő, adott irányvektorú, illetve adott meredekségű egyenes egyenletét hogyan írhatjuk fel? Mi a koordináta-geometriai szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy körnek és egy egyenesnek egy közös pontja legyen?)

M. 17.

a) Határozza meg azokat az x értékeket, amelyekre

$$x^2 - 6x - 16 < 0,$$

majd oldja meg az

$$\log_{0,5}(6x + 7) < \log_{0,5}(x^2 - 9)$$

egyenlőtlenséget!

(Az $y = \log_a x$ függvény milyen a esetén szigorúan monoton növekedő, illetve csökkenő?)

Vázolja az $y = \frac{1}{2} \log_{0,5} x^2$ függvény grafikonját!

Milyen x -ekre értelmezhető ez a függvény?)

b) Egy derékszögű háromszögben a derékszög csúcsából induló szögfelező az átfogót 1:3 arányban osztja. Hogyan szerkeszteni meg a háromszöget, ha adott az átfogó?

Határozza meg a háromszög hegyesszögeit!

(Mi azon pontok mértani helye a síkban, amelyekből egy adott szakasz adott szögben látszik? Hogyan lehet megszerkeszteni ezt a mértani helyet? Milyen arányban osztja a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt?)

M. 18.

a) Oldja meg az

$$5 \cdot 5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 5 < 0$$

egyenlőtlenséget!

(Az $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) exponenciális függvény milyen x -re értelmezhető?)

Hogyan értelmeztük, ha x pozitív egész, pozitív racionális, nulla, negatív racionális és hogyan, ha x irracionális szám?)

b) Egy derékszögű trapéz párhuzamos oldalai a és b , a trapéz magassága m , a trapéz átlói merőlegesek egymásra. Igazolja, hogy $m \equiv \frac{a+b}{2}$!

(Húzzon párhuzamost a trapéz legnagyobb szögének csúcspontján át a másik átlóval! Lásssa be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak! Fejezze be a következő tételt: Ha egy háromszögben egyik szög nagyobb, mint a másik, akkor, . . .)

M. 19.

a) Oldja meg az

$$x^2 + 4x\sqrt{x} - 32x = 0$$

egyenletet!

(Milyen szorzattá alakítási eljárásokat ismer? Négyzetgyökös kifejezések alakíthatók-e szorzattá? Alakítsa szorzattá az $x + 2\sqrt{x}$, illetve az $x - 4$ kifejezéseket, ha $x > 0$!)

b) Vegye fel a koordináta-rendszerben az $A(-4; 1)$, $B(-2; -3)$, $C(6; 1)$, $D(4; 5)$ pontokat!

Lásssa be, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap, majd számítsa ki a téglalap területét!

Igazolja, hogy $\vec{AC} + \vec{BD} = 4\vec{EF}$, ahol E a téglalap átlóinak metszéspontja, F pedig a DC oldal felezőpontja.

Igaz-e, hogy a sík minden P pontjára $\vec{PA} - \vec{PB} = \vec{PD} - \vec{PC}$?

(Hogyan számíthatók ki a PQ koordinátái, ha a P és a Q koordinátái adottak?

Hogyan látható be két vektorról, hogy párhuzamosak, illetve merőlegesek, ha a vektorok koordinátáikkal adottak? Hogyan számíthatók ki két vektor összegének koordinátái, ha a vektorok koordinátáikkal adottak?)

M. 20.

a) Egy mértani sorozat első és negyedik tagjának összege 52, a második és harmadik tagjának összege -12. Mennyi a sorozat első öt elemének összege?

(Milyen sorozatot nevezünk mértaninak? (A rekurzív meghatározást mondja el!) Mértani sorozat-e a következő: $a_1 = 1$ és minden további elem 0?)

b) Legyen AC , illetve BD az O középpontú kör két egymásra merőleges átmérője. Legyen P a rövidebb AB ív, Q a rövidebb BC ív olyan pontja, hogy a POQ szög 90° . Igazolja, hogy az APB és a BQC háromszögek egybevágóak!

(Mit tud a középpontos elforgatásról? Milyen tulajdonságait ismeri?)

M. 21.

a) Oldja meg az

$$(x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$$

egyenletet!

(Alakítsa szorzattá az $u^3 + v^3$, illetve az $u^3 - v^3$ kifejezést! Milyen azonosságot ismer az $(u+v)^3$ kifejezésre? Hogyan igazolná az azonosságokat?)

b) Hozza egyszerűbb alakra az

$$f(x) = \frac{\sin(\pi-x)}{\operatorname{tg}(\pi+x)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi-x)}{\sin(-x)}$$

kifejezést! Milyen x -ekre értelmezhető $f(x)$?

Vázolja az $y = f(x)$ grafikonját, ha az minden megengedett x -re értelmezett!

(Igazolja a következő azonosságokat:

$$\cos(\pi-x) = -\cos x, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{tg} x, \cos(-x) = \cos x.)$$

M. 22.

a) Egy derékszögű háromszög két befogója a és b , a megfelelő szemközti szögek α és β . Igazolja, hogy $(a \sin \alpha + b \sin \beta)^2 = ab (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$!

(Mit értünk egy hegyesszög sinusán, cosinusán és tangensén? Ha α hegyesszög, akkor

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Érvényesek-e ezek az azonosságok minden megengedett α szögre?)

b) Mikor vesz fel az $f(x) = \sqrt{x^2 - 16(x^2 - 2x - 15)}$ függvény pozitív értéket?

(Hogyan oldja meg grafikusán az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenséget? Hogyan oldja meg ugyanezt algebrai úton? Egy kéttényezős szorzat mikor pozitív?)

M. 23.

a) Az ABC háromszögbe írható kör az AB , BC , CA oldalakat rendre az M , N , P pontokban érinti. Bizonyítsa be, hogy az MNP háromszög hegyesszögű!

(Mit tud egy külső pontból egy körhöz húzott érintő szakaszokról és egy kör adott ívéhez tartozó kerületi, valamint érintőszárú kerületi szögeiről?)

b) Egy felvételi vizsgán a

$$\cos 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 2x$$

egyenletet egy vizsgázó a következő módon oldotta meg: „Osszuk el az egyenletet $\cos 2x$ -szel, ekkor

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ tetszőleges}$$

egész szám), tehát az egyenlet megoldása:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

Mi a véleménye arról a megoldásról?

(Beszéljen a $\sin x = a$ egyenlet megoldásairól, ha a tetszőleges valós szám! Az egyenlet grafikus megoldása mit mutat?)

M. 24.

a) Az ABC háromszögben $BA = 4$ cm, $BC = 6$ cm, a B csúcsnál levő szög 30° . A B csúcsnál levő szög szögfelezője az AC oldalt D pontban metszi. Számítsa ki az ABD háromszög területét!

(Milyen adatok ismeretében számítható ki egy háromszög területe? A háromszög belső szögfelezője hogyan osztja ketté a szemközti oldalt?)

b) Egy vizsgázó a $\sqrt{(3x-5)^2} = 5$ egyenletet a következő módon oldotta meg: „Mivel $\sqrt{(3x-5)^2} = 3x-5$, ezért $3x = 10$, az egyenlet egyetlen gyöke

$$x = \frac{10}{3}.$$

„Ez a megoldás nem teljes”, mondta a tanár. Miért? Oldja meg jól az egyenletet!

(Mit értünk az $a \geq 0$ szám négyzetgyökén? Milyen a számokra érvényesek a következő azonosságok:

$$-a = \sqrt{a^2}; \quad a\sqrt{b^2} = -\sqrt{a^2b^2}?)$$

M. 25.

a) Egy rombusz egyik szöge 150° . Igazolja, hogy a rombusz oldala az átlók mértani közepe!

(Milyen paralelogrammát nevezünk rombusznak? A rombusz milyen tulajdonságait ismeri? Mit ért két szakasz mértani közepén?)

b) Határozza meg az a értékét úgy, hogy az $f(x) = x^2 + 2x + a - 10$ kifejezés minden x esetén pozitív értéket vegyen fel!

(Mikor vesz fel az $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú kifejezés minden x -re csak pozitív értéket? Miért?)

M. 26.

a) Egy háromszög két oldala a és b , ezen oldalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Fejezze ki a -val és b -vel a háromszög harmadik oldalát!

(Mit tud a háromszög súlyvonalairól? Milyen állításokat ismer a derékszögű háromszögben?)

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ és $\lg(2^x + 3)$ egy számtani sorozat egymás után következő három eleme legyen!

(Mikor nevezünk egy sorozatot számtani sorozatnak? Milyen tulajdonsága van a számtani sorozatnak?)

M. 27.

a) Vázolja az $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2}$ függvény grafikonját!

Milyen x érték esetén veszi fel a függvény a legkisebb értéket?

(Mi a grafikonja az $y = ax^2$ függvénynek? Hogyan kaphatjuk az $y = ax^2$ függvény grafikonjából az $y = a(x-u)^2 + v$ függvény grafikonját?)

b) Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 10 cm, magassága 5 cm. Mekkora annak a négyzetes oszlopnak a térfogata, amelynek alaplappja a gúla alaplappján, fedőlapjának négy csúcsa a gúla oldalélein van, és oldaléle az alapél kétszerese?

(Milyen gúlát nevezünk szabályosnak? Van-e „egyenes” gúla? Egy szabályos négyoldalú gúlának melyek a szimmetriaxisjai? Hogyan határozható meg a gúla térfogata?)

M. 28.

a) Oldja meg az

$$\left. \begin{aligned} y^2(12 - 2x + 3y) &= 0, \\ x^2y^2(18 - 4x - 3y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

(Mit jelent egy kétismeretlenes egyenletrendszert megoldani? Hogyan oldható meg a kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer? Milyen feltétel esetén van ennek egyetlen megoldása? Egy szorzat mikor nulla?)

b) Legyen $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ és $\cos \alpha \neq 0$. Igazolja, hogy ha $\sin \beta = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$, akkor $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$!

(Hogyan igazolható a $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ azonosság? Soroljon fel néhány olyan trigonometrikus azonosságot, amely minden szögre érvényes!)

M. 29.

a) Írja fel annak a $P(2; 5)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amely az $A(-1; 2)$ és a $B(5; 4)$ pontoktól egyenlő távolságra halad!

(Hogyan írható fel az egyenes egyenlete, ha adott az egyenes két pontja? Mit értünk egy vonal egyenletén?)

b) Oldja meg a $\cos 3x \cos 2x = -\sin 3x \sin 2x$ egyenletet! Vázolja az $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$ függvény grafikonját! Mely helyeken veszi fel a függvény a legkisebb értéket?

(Milyen azonosságot ismer $\cos(\alpha + \beta)$ -ra? Mit tud az $y = \cos x$ függvényről?)

M. 30.

a) Határozza meg az a értékét úgy, hogy az

$$x^2 + (a^2 - 24a + 160)x + 15 = 0$$

egyenlet gyökeinek összege (-16) legyen! Írja fel ez esetben az egyenlet gyöktényezős alakját!

(Hogyan lehet bebizonyítani az $x^2 + px + q = 0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggést? Hogyan vezették le az egyenlet megoldó-képletét?)

b) Az ABC háromszög köré írt kör sugara R , $AB = R\sqrt{2}$, a BAC szög 75° . Számítsa ki a háromszög másik két szögét, és fejezze ki R -rel a háromszög másik két oldalát!

(Milyen összefüggés van a háromszög egy oldala, az oldallal szemközti szög és a háromszög köré írt kör sugara között? Szerkesszen háromszöget, ha adott egy oldala, az oldallal szemközti szög és a háromszög köré írt kör sugara!)

M. 31.

a) Állapítsa meg az $y = 2 - \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$ függvény

legkisebb értékét! Mely x helyen veszi ezt fel a függvény?

(Mit tud az $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú függvény tulajdonságairól? Mely x helyeken növekszik, illetve csökken a függvény? Hol veszi fel a függvény a legkisebb értéket ($a > 0$), és hol a legnagyobbat ($a < 0$)?)

b) Az ABC háromszögben $AB = BC$, a magasságpont M . Számítsa ki az ABC háromszög szögeit, ha $MB = AC$!

(Mit tud a háromszög magasságvonalairól? Mondjon néhány feltételt ahhoz, hogy két háromszög egybevágó legyen! Két alakzatot mikor nevezünk egybevágónak? Mi a helyzet, ha az adott ABC háromszög tompaszögű?)

M. 32.

a) Milyen a, b számok elégítik ki a

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$$

egyenletet? Igazolja, hogy az egyenlet azonosság! Hogyan írható fel két tényező szorzataként \sqrt{ab} , ha $ab \geq 0$?

(Mit értünk az $a \geq 0$ szám négyzetgyökén? Mivel azonos a $\sqrt{a^2b}$, ha $b > 0$?)

b) Vizsgáljuk az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ függvényt. folytonosság, növekedés, fogyás és helyi szélsőérték szempontjából! Vázolja a függvény grafikonját!

(Egészítse ki a következő állításokat!

Ha egy szakaszon a függvény derivált függvénye ..., akkor azon a szakaszon a függvény szigorúan monoton fogy.

Ha ..., akkor azon a szakaszon a függvény szigorúan monoton nő.)

M. 33.

a) Az $f(x) = \frac{\cos x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$ függvény minden

megengedett x -re értelmezett. Határozza meg ezen x -ek halmazát! Az adott kifejezést hozza egyszerűbb alakra, majd vázolja a függvény grafikonját! Milyen x esetén veszi fel a függvény a nulla értéket?

(Mit értünk egy x szög cosinusán, sinusán, illetve cotangensén? A $\cos x$ függvény grafikonjából hogyan kapjuk a $\sin x$ függvény grafikonját?)

b) Az $ax - y = a^2$ egyenletű egyenesek közül melyek érintik a $4y = x^2$ egyenletű parabolát?

(Milyen vonalat nevezünk parabolának? Hogyan szerkeszthetők a parabola pontjai?)

M. 34.

a) Alakítsa szorzattá az

$$x^3 - x^2y - 4xy^2 + 4y^3$$

kifejezést! Oldja meg az

$$\left. \begin{aligned} x^3 - x^2y - 4xy^2 + 4y^3 &= 0, \\ 2x^2 + y^2 &= 12 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert! Az egyenletek grafikonjának elkészítésével ellenőrizze a megoldást!

(Milyen kétismeretlenes egyenletek grafikonját ismeri? Mit tud az $Ax + By + C = 0$, az $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, az $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ egyenletekről?)

b) Melyik nagyobb: $\sin 3$ vagy $\sin 5,2$?

(Mit értünk egy szög'ívmértékén? A π ívmértéknek hány fok felel meg? Hogyan változik az $y = \sin x$ függvény értéke, ha x 0-tól 2π -ig változik?)

M. 35.

a) Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α , a másik hegyesszögű csúspontnak a beírható kör középpontjától való távolsága a . Fejezze ki α -val és a -val a háromszög területét!

(Ismerjük egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét és valamelyik oldalát. Hogyan fejezhető ki a másik két oldal? Hogyan értelmezik a hegyesszögek szögfüggvényeit?)

b) Egy R sugarú kör köré írt egyenlő szárú érintő-trapéz párhuzamos oldalainak aránya 1:2. Forgassa meg a trapézt a szimmetriatengelye körül 180° -kal. Fejezze ki R -rel az így keletkezett forgástest felszínét!

(Hogyan határozható meg a csonkakúp felszíne és térfogata?)

M. 36.

a) Egy felvételi vizsgán az

$$\lg x^2 + \lg (x+4)^2 = 2 \lg 3$$

egyenletet egy tanuló a következő módon oldotta meg: „Ismeretes, hogy $\lg a^2 = 2 \lg a$. Eszerint

$$2 \lg x + 2 \lg (x+4) = 2 \lg 3, \text{ amiből}$$

$$\lg x(x+4) = \lg 3; x^2 + 4x - 3 = 0, x_1 = -2 + \sqrt{7},$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{7}.$$

Az ellenőrzés mutatja, hogy mindkét szám gyöke az egyenletnek.”

A vizsgáztató kérdésére a vizsgázó belátta, hogy $x_1 = -1$ és $x_2 = -3$ is gyöke az egyenletnek. Végezze el az ellenőrzést! Hol vészett el ez a két gyök?

b) Egy rombusz két szomszédos csúcspontja $A(-3; 1)$ és $B\left(\frac{5}{2}; 2\right)$. A rombusz egyik átlójának egyenlete $3x - 4y = -13$. Határozza meg a rombusz másik két csúcspontjának koordinátáit!

(Ismeretes két egyenes irányvektora, meredeksége. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a két egyenes egymásra merőleges legyen? Hogyan határozható meg egy szakasz felezőpontjának koordinátái a végpontok koordinátáinak ismeretében?)

M. 37.

a) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a befogó tétel megfordítását!

(Hogyan szól a befogó tétel? Hogyan bizonyítható be?)

b) Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1 - \cos\left(4x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(4x + \frac{7\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(4x + \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(4x + \frac{9\pi}{2}\right)} \text{ függvényt,}$$

amely minden megengedett x -re értelmezett. Az adott kifejezést hozza egyszerűbb alakra, majd vázolja a függvény grafikonját!

(Milyen azonosságokat ismer $\sin\left(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ és $\cos\left(\alpha + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ -re? Hogyan igazolhatók ezek az azonosságok, ha $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$? Mikor nem értelmezhető egy törtek kifejezés?)

M. 38.

a) Igazolja, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális szám!

Lehet-e két irracionális szám összege racionális?

(Mely számokat nevezük racionálisoknak és melyeket irracionálisoknak? Egészítse ki a következő állításokat!

Ha egy szám . . . , akkor felírható véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban.

Ha egy szám . . . , akkor felírható végtelen . . . alakban.

Érvényes-e az utóbbi két állítás megfordítása?)

b) Tekintsük az $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{1 + \cos x}$ függvényt,

amely minden megengedett x -re értelmezett. Az adott kifejezést hozza egyszerűbb alakra, majd vázolja a függvény grafikonját! Milyen x esetén veszi fel a függvény a nulla értéket?

(Mit értünk egy x szög tangensén? Mi a periódusa a $\operatorname{tg} x$ függvénynek? Vázolja a $\operatorname{tg} x$ függvény grafikonját!)

M. 39.

a) Hány százalékkal növekszik a gömb felszíne illetve térfogata, ha sugarát 50%-kal növeljük?

(Hogyan határozható meg a gömb térfogata? Milyen állítást ismer hasonló testek felszínéről, illetve térfogatáról?)

b) Oldja meg az

$$1 + \sin 2x + 5 \sin x + 5 \cos x = 0$$

egyenletet!

(Milyen x szögekre érvényesek a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosságok? Hogyan igazolhatók ezek az azonosságok?)

M. 40.

a) Oldja meg a $\log_{\sqrt{x}-1} (2x-14) = 2$ egyenletet!

(Hogyan értelmezik a $b > 0$ szám a alapú logaritmusát? Mivel egyenlő $\log_a a^k$? Mit tud az $y = \log_a x$ függvényről, ha $0 < a < 1$?)

b) Az $ABCD$ paralelogramma A csúcspontján átmenő egyenes a BD átlót az E , a BC oldalt az EF , a DC oldal meghosszabbítását a K pontban metszi. Számítsa ki az EF szakasz hosszát, ha $AE = 2$ egység és $EK = 3$ egység.

(Milyen négyszöget nevezünk paralelogrammának? Milyen tulajdonságai vannak a paralelogrammának? Mondjon néhány elégséges feltételt ahhoz, hogy két háromszög hasonló legyen!)

M. 41.

a) Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára a háromszöggel ellentétes oldalon szerkesszen négyzetet! A négyzet D szimmetria középpontját kösse össze C -vel. Igazolja, hogy CD az ACB szög szögfelezője!

(Mikor nevezünk egy négyszöget húrnégyszögnek? Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy négyszög húrnégyszög legyen? Fejezze be a következő tételt: Ha egy kör két íve egyenlő, akkor...)

b) Igazolja, hogy az $x^2 + (\sin \alpha - 1)x - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = 0$

egyenletnek minden α esetén van megoldása. Milyen α esetén egyenlő az egyenlet két gyöke?

(Mi a szükséges és elégséges feltételé annak, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek legyen megoldása? Hogyan látható ez be? Mikor egyenlő a két gyök?)