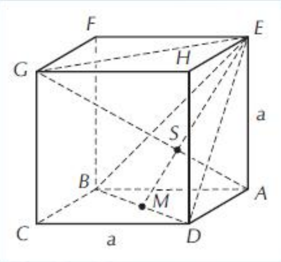
Érthető matematika tankönyv 12. o, 130. oldal: Az *a* élű *ABCDEFGH* kockában az *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élek merőlegesek az *ABCD* lapra. Mekkora arányú részekre osztja a (*BDE*) sík az *AG* testátlót?

1. példa

Az a élű *ABCDEFGH* kockában az *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élek merőlegesek az *ABCD* lapra. Mekkora arányú részekre osztja a $\Sigma(BDE)$ sík az *AG* testátlót?

Megoldás



Első megoldás: A $\Sigma(BDE)$ sík a kockát a *BDE* szabályos háromszögben metszi. A kocka szabályos test, ezért az *AB*, *AD*, *AE* élek az *AG* testátlóra forgásszimmetrikusan helyezkednek el. (Ugyanez igaz a *GC*, *GF*, *GH* élekre is.) Az *AG* testátló körüli 120°-os forgatás a *BDE* háromszöget önmagába viszi, ezért *AG* és Σ metszéspontja a *BDE* háromszög *S* középpontja, és *AG* merőleges a Σ síkra.

Jelölje *M* az *ABCD* négyzet középpontját, ez egyúttal a *BD* szakasz felezőpontja *(ábra)*. *ES* a *BDE* háromszög *EM* súlyvonalának a kétharmada. A háromszög oldala $\sqrt{2}\,a$, így $ES = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$. *AS* merőleges a *BDE* síkra, így merőleges annak minden egyenesére, tehát *ES*-re is. Az *ASE* derékszögű háromszögből $AS = \sqrt{AE^2 - ES^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{3}$. A testátló hossza $AG = \sqrt{3}\,a$, tehát *S* az *AG* átló *A*-hoz közelebbi harmadolópontja.

Második megoldás: Tekintsük az *ACGE* síkmetszetet, illetve az *AEG* derékszögű háromszöget! Ebben *ES* éppen az *AG* oldalhoz tartozó magasság, így *AS* meghatározása elemi síkgeometriai feladat. Például a befogótételből $AS\cdot AG = AE^2$, innen $AS = \frac{AE^2}{AG} = \frac{a^2}{\sqrt{3}\,a} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Megjegyzés

Ha sikerült szerencsés síkmetszetet választanunk, akkor többféle megoldást adhatunk. Például az előző megoldást folytathattuk volna a terület kétféle felírásával: $\frac{ES\cdot AG}{2} = \frac{AE\cdot EG}{2}$ (innen *ES* határozható meg). Vagy egy másik lehetőség az *ACGE* téglalapban *EM* és *AG* szakaszok osztásarányának meghatározására, ha az *AEC* háromszöget emeljük ki. Ebben *EM* és *AG* súlyvonal-egyenesek, tehát osztásarányuk számítható (a súlyvonalak egymást kölcsönösen harmadolják). Végül egy utolsó megoldás (nyilván még továbbiak is adhatók): az *AMS* és *GES* háromszögek hasonlók, a hasonlóság aránya 1 : 2, és így tovább.

Harmadik megoldás: Elegáns megoldás adható a korábban tárgyalt térfogati elv segítségével. Az *ABDE* tetraéder térfogatát kétféleképpen felírhatjuk, kihasználva az *AB*, *AD*, *AE* élek merőlegességét: $\frac{T_{BDE}\cdot AS}{3} = \frac{\frac{AB\cdot AD}{2}\cdot AE}{3}$. Innen $\frac{\frac{\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot AS}{3} = \frac{\frac{a\cdot a}{2}\cdot a}{3}$, azaz $AS = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Negyedik megoldás: A *BDE* háromszög *S* súlypontjába mutató vektor $\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{3}$, tetszőleges origó esetén. Ha most az *A* csúcsot választjuk a koordináta-rendszer kezdőpontjának, akkor $\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{3}$. Mivel $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, így $\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AG}}{3}$ valóban.

Megjegyzés

Ez utóbbi megoldás mutatja, hogy kocka helyett téglatestre is igaz az állítás (azaz ennek az *AG* testátlóját is harmadolja a *BDE* sík).