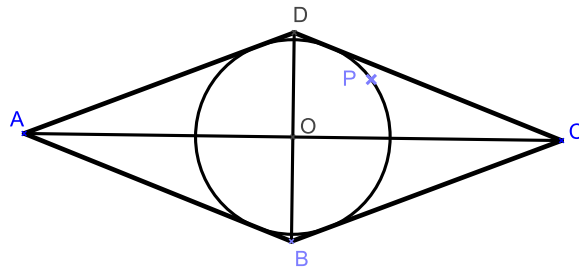


Feladat: Az $ABCD$ rombusz hegyesszöge 45° . Mutassa meg, hogy a rombusz beírt körének tetszőleges P pontjára teljesül

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \frac{5}{2}AB^2.$$

I. Megoldás: A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével (Geometria FGY I. 1671. feladat). Ennek következménye, hogy a háromszög súlyvonala kifejezhető az oldalak hosszának segítségével.



Legyen O a beírt kör középpontja. Ekkor PO az APC háromszög súlyvonala, ezért

$$PO^2 = \frac{PA^2 + PC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}.$$

Hasonló megfontolással a BPD háromszögből kapjuk, hogy

$$PO^2 = \frac{PB^2 + PD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}.$$

Ha összeadjuk a két egyenletet és szorozzuk mindkét oldalt 2-vel, akkor rendezés után

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$

Az AC és BD a rombusz átlói, így a paralelogramma-tétel alapján

$$AC^2 + BD^2 = 4 \cdot AB^2.$$

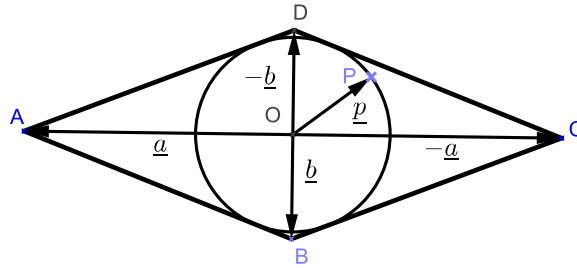
Másrészt a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge 45° , tehát

$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2}AB, \text{ vagyis } 4 \cdot PO^2 = \frac{1}{2}AB^2.$$

Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= 4 \cdot PO^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2} = 4 \cdot PO^2 + 2 \cdot AB^2 = \\ &= \frac{1}{2}AB^2 + 2 \cdot AB^2 = \frac{5}{2}AB^2. \end{aligned}$$

II. Megoldás: Irányítsunk vektorokat az O pontból a rombusz csúcsaiba és a P pontba az ábra szerint. Legyen $\vec{OA} = \underline{a}$, $\vec{OB} = \underline{b}$ és $\vec{OP} = \underline{p}$. A rombusz átlói felezik egymást, így $\vec{OC} = -\vec{OA} = -\underline{a}$ továbbá $\vec{OD} = -\vec{OB} = -\underline{b}$.



A PA , PB , PC , PD szakaszok hosszának négyzete a $(\underline{p} - \underline{a})$, $(\underline{p} - \underline{b})$, $(\underline{p} - \underline{c})$, $(\underline{p} - \underline{d})$ vektor önmagával vett skaláris szorzata, emiatt

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\underline{p} - \underline{a})^2 + (\underline{p} - \underline{b})^2 + (\underline{p} + \underline{a})^2 + (\underline{p} + \underline{b})^2 = 4\underline{p}^2 + 2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2.$$

Ebből egyrészt a Pitagorasz-tétel alapján

$$2\underline{a}^2 + 2\underline{b}^2 = 2 \cdot AB^2,$$

másrészt az első megoldásban szereplő gondolattal a rombusz magassága $2 \cdot PO$, hegyesszöge 45° , tehát

$$2 \cdot PO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB, \text{ vagyis } 4 \cdot \underline{p}^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$

Ezzel beláttuk, hogy

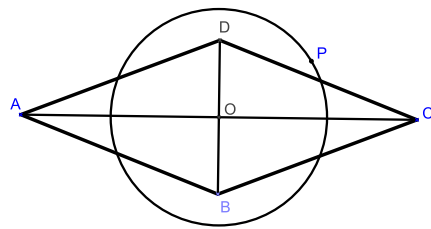
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2 \cdot AB^2 + \frac{1}{2} AB^2 = \frac{5}{2} AB^2.$$

Megjegyzések:

1. A rombusz középpontja körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjára állandó lesz a

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

kifejezés értéke.



2. A feladat állítása általánosabban is igaz. Egy tetszőleges n -szög (n pontból álló pontrendszer) esetén a súlypont, mint középpont körül rajzolt R sugarú kör tetszőleges P pontjának az n -szög csúcsaitól (a pontrendszer pontjaitól) vett távolságainak négyzetösszege nem függ a P pont választásától, azaz

$$\sum_{i=1}^n PA_i^2 = \text{állandó}$$

Az állítás bizonyítása a 2. megoldásban közölthöz hasonló módon végezhető el.