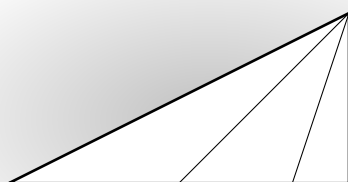

Csányi Tibor, Molnár István, Rakamazi Richárd,
Szoldatics József, Teleki Olivér

Egy OKTV feladatról



2. javított, kiegészített kiadás

2025. április 1.

A 2024/2025-es tanévben az OKTV I. kategória döntőjében szerepelt következő feladat:

A feladat

Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszögben a 90 cm hosszú BC befogó D és E pontjaira $BD = 45$ cm, $DE = 30$ cm és $EC = 15$ cm, továbbá $\angle DAB = \angle CAE = \alpha$. Számítsa ki az ABC háromszög területét.

Ez a feladat már első látásra is nagyon tetszett – mivel láthatóan volt, hogy több megoldási módja is van. Ezért egy baráti társaság elhatározta, hogy készít egy „gyűjtemény”-t a megoldásokból, hiszen a pontozási útmutató ennyi féle megoldást nem tud tartalmazni. Ezt a gyűjteményt tartja most a kezében.

A baráti társaság a következő kollégákból tevődött össze:

- Csányi Tibor, BGSZC Hunfalvy János Két Tanítási Nyelvű Közgazdasági Technikum, Budapest
- Molnár István, Gál Ferenc Egyetem, Gazdasági Kar, Békéscsaba
- Rakamazi Richárd, Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium, Budapest
- Szoldatics József, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, Budapest
- Teleki Olivér, Budapesti Műszaki Szakképzési Centrum, Egressy Gábor Két Tanítási Nyelvű Technikum, Budapest

A megoldások leírás során azt az elvet követtük, hogy ha minden lépést nem is, de többségüket leírtuk, nem csak az időnkénti jelzőpontokat. Ugyanakkor igyekeztünk minden megoldást 1 oldalra összesűríteni, tehát ritkítottuk a leírt sorokat. Lehet, hogy ezzel kétféle hibát is a terhünkre rónak:

- nagyon szűkszavú a leírás
- túlságosan is részletes a leírás.

Vállaljuk, hogy mind a két vélemény igaz lehet, sőt(!), akár egyidejűleg is.

A megoldások során az $AC = m$ jelölést használtuk mindvégig. Nagyon gyakran magasabbfokú (negyedfokú, de másodfokúra visszavezethető) egyenletre vezetnek a megoldások. Ennek megoldása során ha m^2 -re negatív szám adódott, azt automatikusan kizártunk a megoldásból, valamint szintén kizártuk az $m < 0$ eseteket is. Ezeket az adott helyen külön nem jelöltük (hogy egy oldalra felférjen a megoldás).

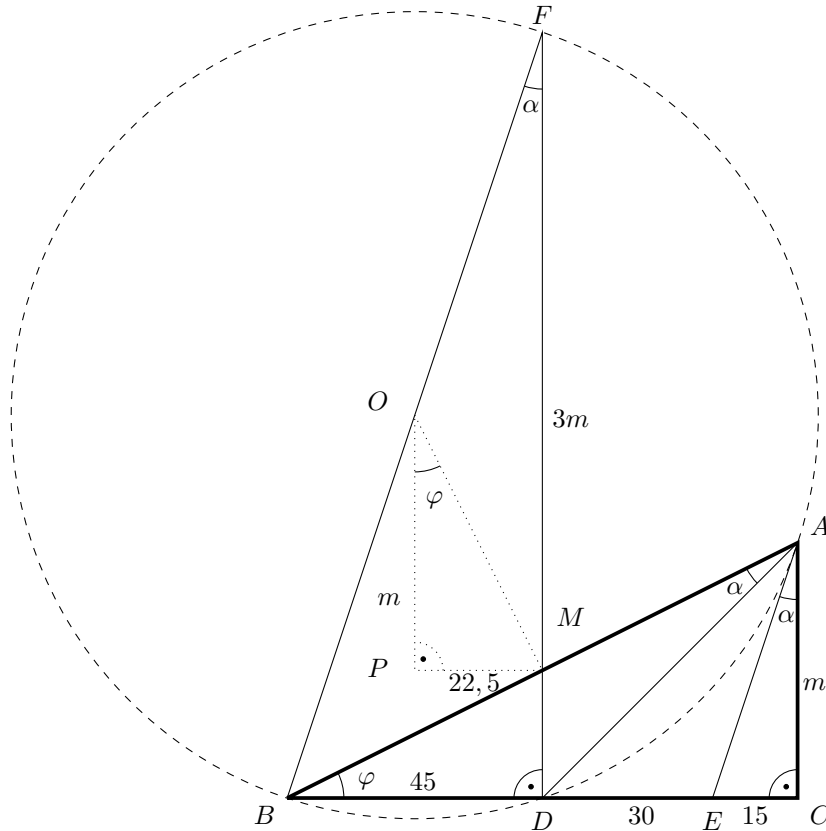
És végül nem írtunk mértékegységet, mindenhol cm -t használtunk. Így a keresett és megkapott terület cm^2 -ben értendő minden esetben.

Jó böngészést kívánunk!

2025. március 19.

1. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen F olyan pont, hogy $DF = 3m$ és $DF \perp BC$ az ábra szerint. Kössük össze F pontot B -vel is. Legyen O az FB szakasz felezőpontja és legyen $\angle CBA = \varphi$.



$BDF\triangle \sim ECA\triangle$, hiszen a befogók háromszorosak, tehát $\angle BFD = \alpha$.

A BD szakasz mind A pontból, mind F pontból ugyanakkora szög alatt látszik, tehát $B; D; A; F$ pontok egy körön vannak. Ez a kör megegyezik a $BDF\triangle$ köré írt körrel, aminek a középpontja az átfogó felénél (O pont) van.

Ebben a körben AB egy húr, aminek a felező merőlegese (OM) átmegy a kör középpontján. A BC oldallal M -en keresztül húzott párhuzamos és az O -n keresztül a BC oldalra állított merőleges metszéspontja legyen P .

Mivel M felezőpont, ezért $MD = \frac{1}{2} \cdot m$, tehát $PO = m$ és $PM = 22.5$.

Az OPM egy derékszögű háromszög. Mivel $OP \perp BD$ és $OM \perp BA$ ezért $\angle POM = \varphi$, tehát ez a háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

A hasonlóságot felírva (a megfelelő oldalak arányát)

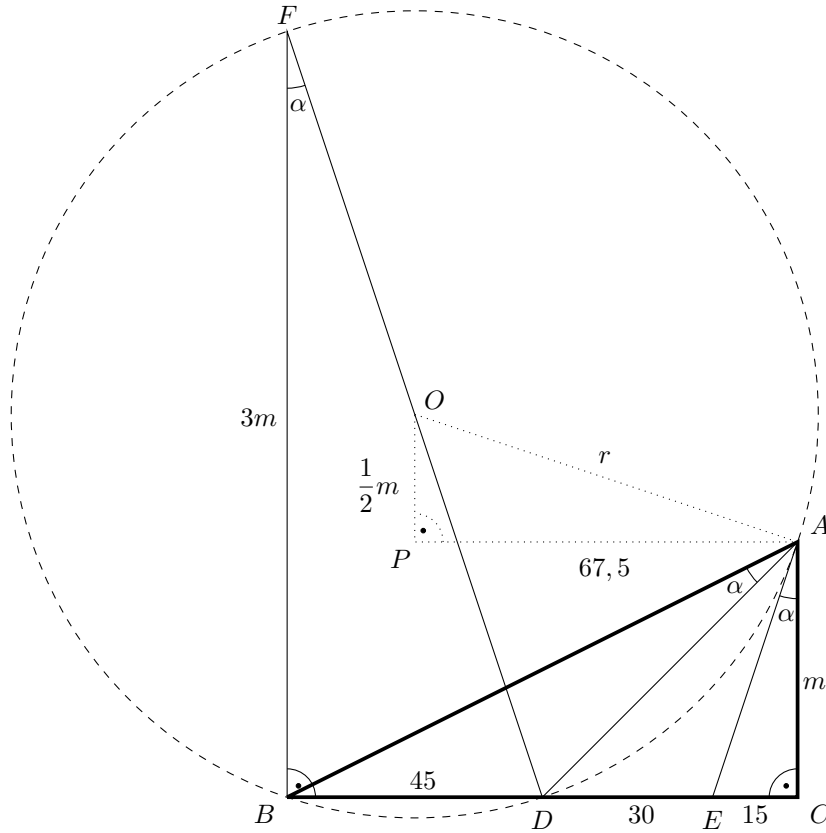
$$\begin{aligned} \frac{22,5}{m} &= \frac{m}{90} \\ m^2 &= 2025 \\ m &= 45 \end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

2. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen F olyan pont, hogy $BF = 3m$ és $BF \perp BC$ az ábra szerint. Kössük össze F pontot D -vel is. Legyen O az FD szakasz felezőpontja.



$BDF\triangle \sim ECA\triangle$, hiszen a befogók háromszorosak, tehát $BFD\angle = \alpha$. A BC oldallal A -en keresztül húzott párhuzamos és az O -n keresztül BC oldalra állított merőleges metszéspontja legyen P .

A BD szakasz mind A pontból, mind F pontból ugyanakkora szög alatt látszik, tehát B ; D ; A ; F pontok egy körön vannak.

Ez a kör megegyezik a $BDF\triangle$ köré írt körrel, aminek a középpontja az átfogó felénél (O pont) van, sugara pedig az átfogó hosszának a fele. Ebben a körben OA is sugár

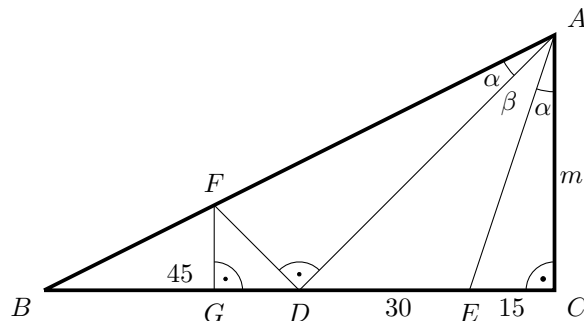
$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{45^2 + (3m)^2} = \sqrt{67,5^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot m\right)^2} \\
 45^2 + (3m)^2 &= 4 \cdot \left[67,5^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot m\right)^2\right] \\
 45^2 + 9m^2 &= 135^2 + m^2 \\
 m^2 &= 2025 \\
 m &= 45
 \end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

4. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen $\angle DAE = \beta$. Állítsunk merőlegest az AD szakaszra D -ben, metszéspontja AB -vel legyen F . Bocsássunk merőleges F -ből DB -re, a metszéspont G .



$\triangle CAE \sim \triangle DAF$, mert szögeik megegyeznek.

$$\frac{EC}{AC} = \frac{FD}{DA}$$

$\triangle CAD \sim \triangle DFG$, mert szögeik megegyeznek ($\angle CAD$ és $\angle GDF$ merőleges szárú szögek).

$$\frac{AC}{AD} = \frac{GD}{FD}$$

Összeszorozva őket

$$\frac{EC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{FD}{DA} \cdot \frac{GD}{FD}$$

$$EC = GD = 15$$

$\triangle CAB \sim \triangle GFB$, mert szögeik megegyeznek

$$\frac{GF}{BG} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{GF}{30} = \frac{m}{90}$$

$$GF = \frac{m}{3}$$

A $\triangle CAD \sim \triangle DFG$ hasonlóságát ismét használva

$$\frac{AC}{CD} = \frac{GD}{GF}$$

$$\frac{m}{45} = \frac{15}{\frac{m}{3}} = \frac{45}{m}$$

$$m^2 = 45^2$$

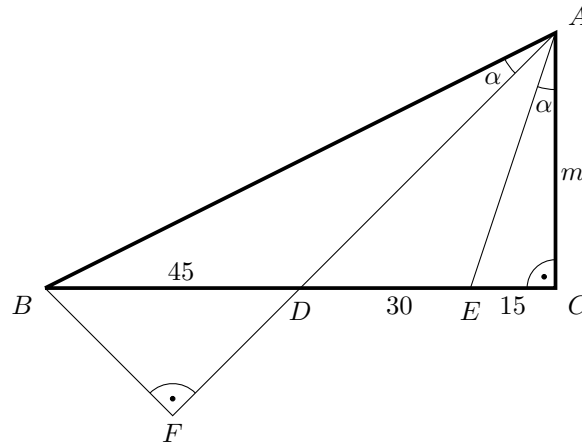
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

5. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Az AD szakasz D -n túli meghosszabbításán vegyük fel az F pontot úgy, hogy ebből a pontból az AB szakasz éppen derékszögben látszódjon az ábrán látható módon.



A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ADC háromszögre:

$$AD = \sqrt{m^2 + 2025}$$

A BDF és az ADC háromszögek hasonlóak, ezért:

$$\begin{aligned} \frac{BF}{BD} &= \frac{AC}{AD}, & \Rightarrow & BF = \frac{45m}{\sqrt{m^2 + 2025}} \\ \frac{DF}{BD} &= \frac{DC}{AD}, & \Rightarrow & DF = \frac{2025}{\sqrt{m^2 + 2025}} \end{aligned}$$

Az ABF és az ACE háromszögek is hasonlóak, ezért:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AD + DF}{BF} = \frac{AC}{EC}$$

Behelyettesítve a korábban megkapott kifejezéseket:

$$\frac{\sqrt{m^2 + 2025} + \frac{2025}{\sqrt{m^2 + 2025}}}{\frac{45m}{\sqrt{m^2 + 2025}}} = \frac{m}{15}$$

$$\frac{(m^2 + 2025) + 2025}{45m} = \frac{m}{15}$$

$$\begin{aligned} 15(m^2 + 2025) + 30375 &= 45m^2 \\ m^2 &= 2025 \end{aligned}$$

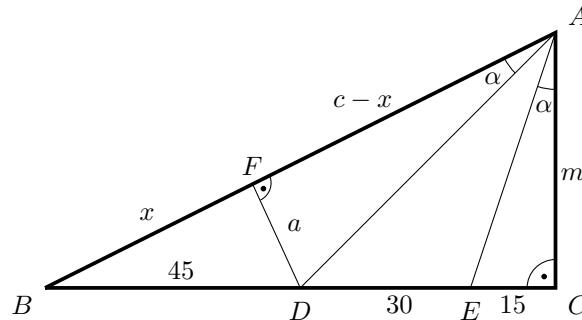
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

6. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. A D pontból állítsunk merőlegest az AB szakaszra. A merőleges talppontját jelölje F . Legyen $AB = c$, $DF = a$, $BF = x$. Ekkor $AF = c - x$ az ábrán látható módon:



Mivel az AEC és az AFD háromszögek hasonlóak, ezért:

$$\frac{15}{m} = \frac{a}{c-x} \quad \Rightarrow \quad x = c - \frac{am}{15}$$

A BDF és az ABC háromszögek is hasonlóak, ezért:

$$\frac{a}{45} = \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{45m}{a}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{m}{90} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90a}{m}$$

Az ABC háromszögre a Pitagorasz-tételt felírva:

$$m^2 + 90^2 = c^2$$

Mivel $x = c - \frac{am}{15} = \frac{90a}{m}$ és $c = \frac{45m}{a}$, ezért:

$$\frac{45m}{a} - \frac{am}{15} = \frac{90a}{m} \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{1\,350a^2}{675 - a^2}$$

Mivel $m^2 + 90^2 = c^2$ és $c = \frac{45m}{a}$, ezért

$$\frac{1\,350a^2}{675 - a^2} + 8\,100 = \frac{2\,025m^2}{a^2} = \frac{2\,025 \cdot \frac{1\,350a^2}{675 - a^2}}{a^2} = 2\,025 \cdot \frac{1\,350}{675 - a^2}$$

Rendezve az egyenletet a

$$6\,750a^2 - 2\,733\,750 = 0$$

$$a^2 = 405$$

$$m^2 = \frac{1\,350a^2}{675 - a^2} = 2\,025$$

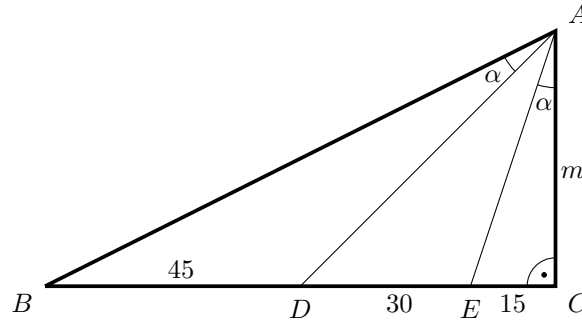
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2\,025$$

7. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát.



A Pitagorasz-tételt alkalmazva az AEC , az ADC és az ABC háromszögekre:

$$AE = \sqrt{m^2 + 225}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 2025}; \quad AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

Az AEC háromszög területe:

$$t_1 = \frac{15m}{2} = \frac{m \cdot \sqrt{m^2 + 225} \cdot \sin \alpha}{2}$$

Az ABD háromszög területe:

$$t_2 = \frac{45m}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100} \cdot \sin \alpha}{2}$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{45m}{2}}{\frac{15m}{2}} = 3$$

Ekkor

$$\frac{\frac{\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100} \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{m \cdot \sqrt{m^2 + 225} \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{(m^2 + 2025)(m^2 + 8100)}}{m \cdot \sqrt{m^2 + 225}} = 3$$

Ebből a

$$\sqrt{(m^2 + 2025)(m^2 + 8100)} = 3 \cdot m \cdot \sqrt{m^2 + 225}$$

Rendezve és megoldva

$$2m^4 - 2025m^2 - 4100625 = 0$$

$$m^2 = 2025$$

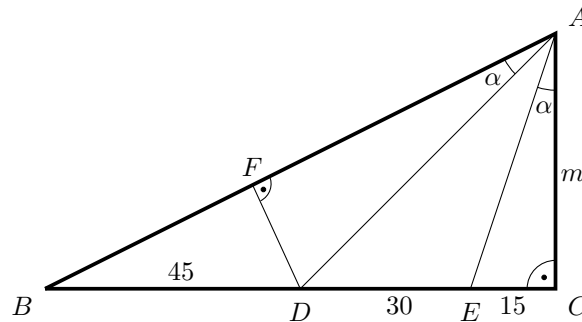
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

8. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. A D pontból állítsunk merőlegest az AB szakaszra. A merőleges talppontja F .



Pitagorasz-tételt alkalmazva rendre az AEC , ADC és ABC háromszögekben

$$AE = \sqrt{m^2 + 15^2}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 45^2} \quad AB = \sqrt{m^2 + 90^2}$$

Az $ABD\triangle$ területét számolva

$$t_{ABD\triangle} = \frac{AB \cdot DF}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2} \quad \Rightarrow \quad DF = \frac{BD \cdot AC}{AB}$$

Az ACE és AFD háromszögek hasonlóak, így

$$\frac{EC}{FD} = \frac{AE}{AD} \quad \Rightarrow \quad DF = \frac{AD \cdot EC}{AE}$$

A kapottakat felhasználva és rendezve

$$\begin{aligned} DF &= \frac{BD \cdot AC}{AB} = \frac{AD \cdot EC}{AE} \\ \frac{45 \cdot m}{\sqrt{m^2 + 90^2}} &= \frac{15 \cdot \sqrt{m^2 + 45^2}}{\sqrt{m^2 + 15^2}} \\ \frac{9m^2}{m^2 + 90^2} &= \frac{m^2 + 45^2}{m^2 + 15^2} \\ 9m^2 \cdot (m^2 + 225) &= (m^2 + 2025) \cdot (m^2 + 8100) \end{aligned}$$

Rendezve és megoldva

$$2m^4 - 2025m^2 - 4100625 = 0$$

$$m^2 = 2025$$

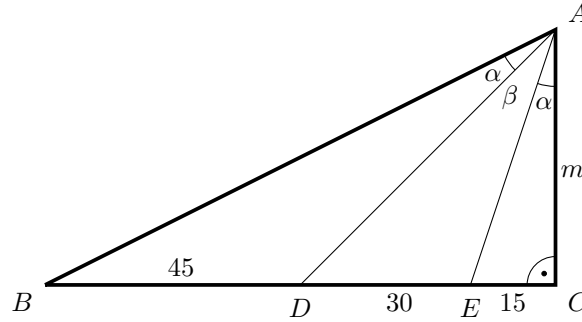
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

9. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen $\angle DAE = \beta$.



Nézzük a háromszögek területét, legyen $t_{ECA\Delta} = t$. Ekkor

$$t_{BDA\Delta} = 3t; \quad t_{DEA\Delta} = 2t$$

Egy háromszög területe kiszámolható két oldalból és a közrezárt szögből is:

$$t_{ECA\Delta} = t = \frac{AE \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} \quad (1)$$

$$t_{BDA\Delta} = 3t = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} \quad (2)$$

$$t_{DCA\Delta} = 3t = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} \quad (3)$$

$$t_{BEA\Delta} = 5t = \frac{AB \cdot AE \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} \quad (4)$$

Most (2) és (1) hányadosát véve

$$3 = \frac{3t}{t} = \frac{\frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2}}{\frac{AE \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2}} = \frac{AB \cdot AD}{AE \cdot AC}$$

(4) és (3) hányadosát véve

$$\frac{5}{3} = \frac{5t}{3t} = \frac{\frac{AB \cdot AE \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}}{\frac{AD \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}} = \frac{AB \cdot AE}{AD \cdot AC}$$

A kapott összefüggéseket összeszorozva és használva Pitagorasz tételét

$$3 \cdot \frac{5}{3} = \frac{AB \cdot AD}{AE \cdot AC} \cdot \frac{AB \cdot AE}{AD \cdot AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$5 = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{m^2 + 90^2}{m^2}$$

$$m^2 = 45^2$$

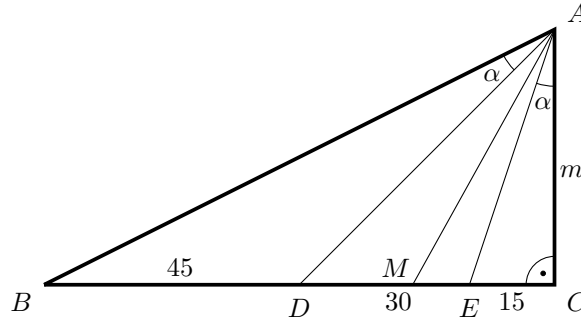
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

10. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen M olyan pont a DE szakaszon, hogy AM az EAD szögfelezője. AM egyben a CAB szögfelezője is. Legyen továbbá $DM = x$.



Alkalmazzuk a szögfelező tételt az EAD és a CAB háromszögekben

$$\frac{x}{30-x} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot AD}{AD+AE}$$

$$\frac{45+x}{45-x} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow x = \frac{45 \cdot AB - 45 \cdot AC}{AB+AC}$$

Az x kifejezések megegyeznek, tehát

$$\frac{30 \cdot AD}{AD+AE} = \frac{45 \cdot AB - 45 \cdot AC}{AB+AC}$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva az AEC , az ADC és az ABC háromszögekre:

$$AE = \sqrt{m^2 + 225}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 2025}; \quad AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

Ezeket behelyettesítve

$$\frac{30 \cdot \sqrt{m^2 + 2025}}{\sqrt{m^2 + 2025} + \sqrt{m^2 + 225}} = \frac{45 \cdot \sqrt{m^2 + 8100} - 45 \cdot m}{\sqrt{m^2 + 8100} + m}$$

Gyöktelenítve és rendezve

$$m^2 - 2025 + 2 \cdot m \cdot \sqrt{m^2 + 8100} = 3 \cdot \sqrt{(m^2 + 2025) \cdot (m^2 + 225)}$$

Négyzetre emelve és rendezve kapjuk

$$4m \cdot (m^2 - 2025) \cdot (m - \sqrt{m^2 + 8100}) = 0$$

Itt $4m > 0$ és $m - \sqrt{m^2 + 8100} < 0$, tehát

$$m^2 = 2025$$

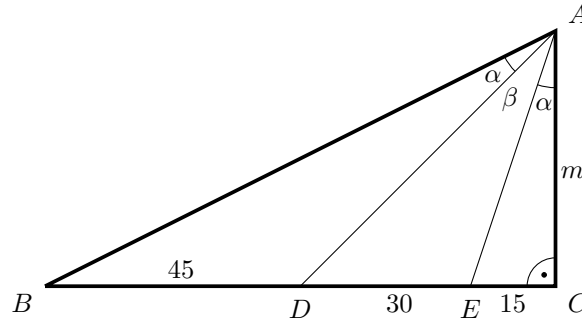
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

11. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen $\angle DAE = \beta$.



Alkalmazzuk Pitagorasz tételét

$$AE = \sqrt{m^2 + 225}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 2025}; \quad AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

Az $AEC\triangle$ -ben

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}}$$

az $ABC\triangle$ -ben

$$\cos(2\alpha + \beta) = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 8100}}$$

Alkalmazzuk a szinusztételt az ABD és AEC háromszögben

$$\frac{\sin(90^\circ - (2\alpha + \beta))}{AD} = \frac{\sin \alpha}{BD} \Rightarrow \frac{\cos(2\alpha + \beta)}{\sqrt{m^2 + 2025}} = \frac{\sin \alpha}{45}$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{AC} = \frac{\sin \alpha}{BD} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{m} = \frac{\sin \alpha}{15}$$

Ezekből

$$45 \cdot \frac{\cos(2\alpha + \beta)}{\sqrt{m^2 + 2025}} = \sin \alpha = 15 \cdot \frac{\cos \alpha}{m}$$

$$3 \cdot \frac{\frac{m}{\sqrt{m^2 + 2025}}}{\sqrt{m^2 + 2025}} = \sin \alpha = \frac{\frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}}}{m}$$

$$\frac{3 \cdot m}{\sqrt{m^2 + 8100}} = \frac{\sqrt{m^2 + 2025}}{\sqrt{m^2 + 225}}$$

$$\frac{9 \cdot m^2}{m^2 + 8100} = \frac{m^2 + 2025}{m^2 + 225}$$

$$m^2 = 2025$$

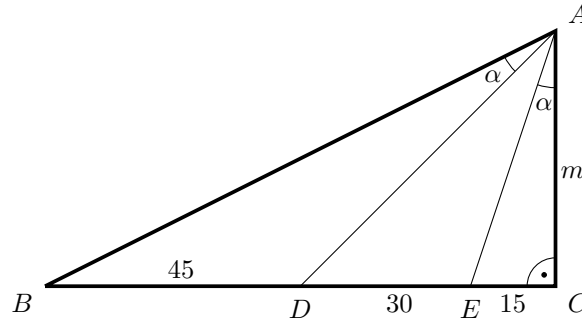
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

12. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát.



A Pitagorasz-tételt alkalmazva az AEC , az ADC és az ABC háromszögekre:

$$AE = \sqrt{m^2 + 225}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 2025}; \quad AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

Az AEC háromszögre fennáll

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}}$$

Az ABD háromszögre koszinusz tételt felírva

$$45^2 = \left(\sqrt{m^2 + 2025}\right)^2 + \left(\sqrt{m^2 + 8100}\right)^2 - 2\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100} \cdot \cos \alpha$$

melyből

$$\cos \alpha = \frac{m^2 + 4050}{\sqrt{(m^2 + 2025)(m^2 + 8100)}}$$

adódik. Ezekből az alábbi egyenletet lehet felírni:

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}} = \frac{m^2 + 4050}{\sqrt{(m^2 + 2025)(m^2 + 8100)}}$$

Mivel mindkét oldal értéke pozitív, ezért négyzetre emelés és rendezés után

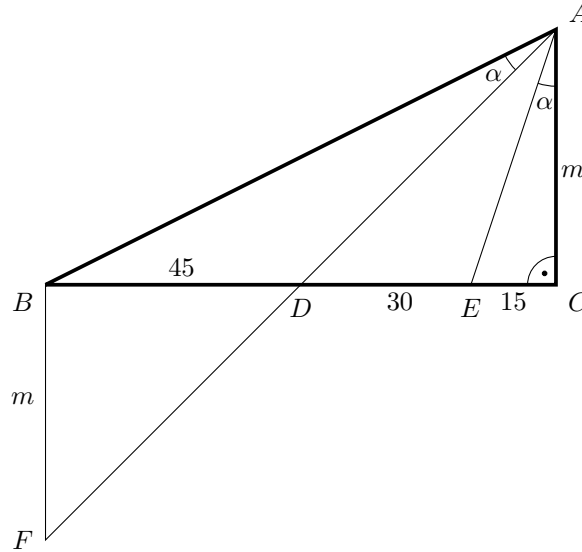
$$\begin{aligned} \frac{m^2}{m^2 + 225} &= \frac{m^4 + 8100m^2 + 16402500}{m^4 + 10125m^2 + 16402500} \\ m^2 \cdot (m^4 + 10125m^2 + 16402500) &= (m^2 + 225) \cdot (m^4 + 8100m^2 + 16402500) \\ 2m^4 - 2025m^2 - 4100625 &= 0 \\ m^2 &= 2025 \\ m &= 45 \end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

13. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. A B ponton át merőlegest állítunk az BC egyenesre. A merőleges és az AD egyenes metszéspontját jelölje F .



A Pitagorasz-tételt alkalmazva az AEC , az ADC és az ABC háromszögre:

$$AE = \sqrt{m^2 + 225}; \quad AD = \sqrt{m^2 + 2025}; \quad AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

$$AF = 2 \cdot AD = 2 \cdot \sqrt{m^2 + 2025}$$

Az AEC háromszögre fennáll

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}}$$

A BFD és a CAD háromszögek egybevágók, mert $BD = DC = 45$ és a rajtuk fekvő szögek egyenlők. Így $\angle BFD = \alpha + \beta$ és $BF = m$.

Az ABF háromszögre koszinusz tételt felírva

$$m^2 = \left(2 \cdot \sqrt{m^2 + 2025}\right)^2 + \left(\sqrt{m^2 + 8100}\right)^2 - 2 \left(2 \cdot \sqrt{m^2 + 2025}\right) \cdot \sqrt{m^2 + 8100} \cdot \cos \alpha$$

$$m^2 = 5 \cdot m^2 + 16200 - 4 \cdot \sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100} \cdot \frac{m}{\sqrt{m^2 + 225}}$$

$$m \cdot \sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100} = (m^2 + 4050) \cdot \sqrt{m^2 + 225}$$

melyből

$$2m^4 - 2025m^2 - 4100625 = 0$$

$$m^2 = 2025$$

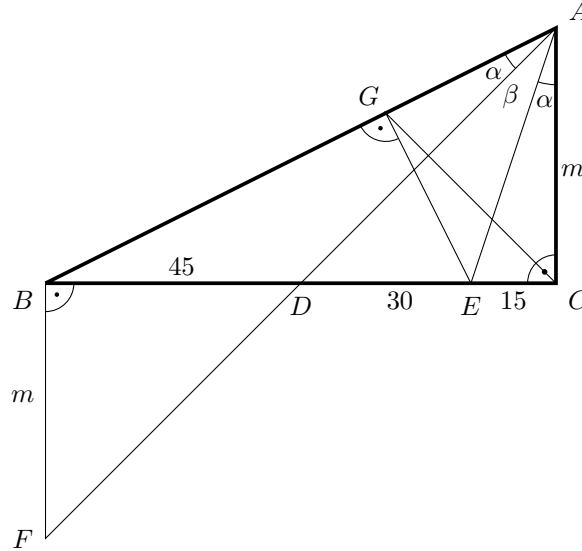
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

14. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. A B ponton át merőlegest állítunk az BC egyenesre. A merőleges és az AD egyenes metszéspontját jelölje F . A DAE szöget pedig jelölje β . Továbbá az E ponton át merőlegest állítunk az AB egyenesre, ez az AB egyenest a G pontban metszi. Összekötve a kapott G pontot az E ponttal az $AGEC$ húrnégyszöget kapjuk, mert C és G pontoknál derékszög van.



Ekkor az $\angle CGE = \alpha$, mert közös ívhez tartozó kerületi szögek, ugyanígy az $\angle ECG = \alpha + \beta$.

A BFD és a CAD háromszögek egybevágók, mert $BD = DC = 45$ és a rajtuk fekvő szögek egyenlők. Így $\angle BFD = \alpha + \beta$ és $BF = m$.

A BEG és az ABC háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők. Így

$$\frac{EG}{BE} = \frac{AC}{BA} \quad \Rightarrow \quad EG = \frac{AC \cdot BE}{BA} = \frac{m \cdot 75}{BA} \quad (1)$$

Az ECG és a BFA háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők. Így

$$\frac{EG}{CE} = \frac{AB}{BF} \quad \Rightarrow \quad EG = \frac{AB \cdot CE}{BF} = \frac{15 \cdot AB}{m} \quad (2)$$

A Pitagorasz-tételt alkalmazva az ABC háromszögben

$$AB = \sqrt{m^2 + 8100}$$

Ezt és az (1), illetve a (2) összefüggés felhasználásával felírható a

$$\frac{75 \cdot m}{\sqrt{m^2 + 8100}} = \frac{15 \cdot \sqrt{m^2 + 8100}}{m}$$

$$75 \cdot m^2 = 15 \cdot (m^2 + 8100)$$

$$m^2 = 2025$$

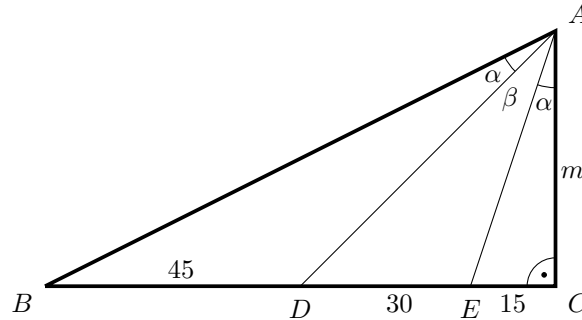
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

15. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen $\angle DAE = \beta$.



Írjunk fel néhány szög tangensét a következő derékszögű háromszögekben

$$ECA\triangle \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{m}$$

$$DCA\triangle \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{45}{m}$$

$$BCA\triangle \Rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{90}{m}$$

Használjuk a tangens addíciós tételét

$$\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (\alpha + \beta)] = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

Felhasználva a kapott tangens értékeket

$$\frac{90}{m} = \frac{\frac{15}{m} + \frac{45}{m}}{1 - \frac{15}{m} \cdot \frac{45}{m}} = \frac{15m + 45m}{m^2 - 15 \cdot 45}$$

$$\frac{90}{m} = \frac{60 \cdot m}{m^2 - 675}$$

$$\begin{aligned} 90 \cdot (m^2 - 675) &= 60 \cdot m^2 \\ m^2 &= 2025 \end{aligned}$$

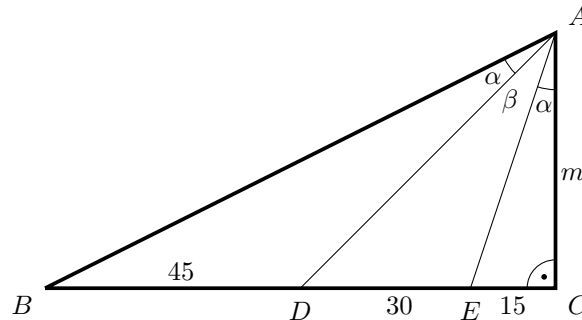
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

16. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Legyen $\angle DAE = \beta$.



Írjunk fel néhány szög tangensét a következő derékszögű háromszögekben

$$\begin{aligned} ECA\triangle &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{m} \\ DCA\triangle &\Rightarrow \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \frac{m}{45} \\ BCA\triangle &\Rightarrow \operatorname{tg} [90^\circ - (2\alpha + \beta)] = \frac{m}{90} \end{aligned}$$

Utolsó két sort összevetve

$$\operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = 2 \cdot \operatorname{tg} [90^\circ - (2\alpha + \beta)]$$

Első két sort összeszorozva

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \frac{15}{m} \cdot \frac{m}{45} = \frac{1}{3}$$

A $\operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \operatorname{tg} [90^\circ - (2\alpha + \beta) + \alpha]$ összefüggést és a tangens addíciós tételét használva

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} [90^\circ - (2\alpha + \beta) + \alpha] = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} [90^\circ - (2\alpha + \beta)] + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} [90^\circ - (\alpha + \beta)] \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{15}{m} \cdot \frac{\frac{m}{90} + \frac{15}{m}}{1 - \frac{m}{90} \cdot \frac{15}{m}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{6} + \left(\frac{15}{m}\right)^2}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

$$m^2 = 2025$$

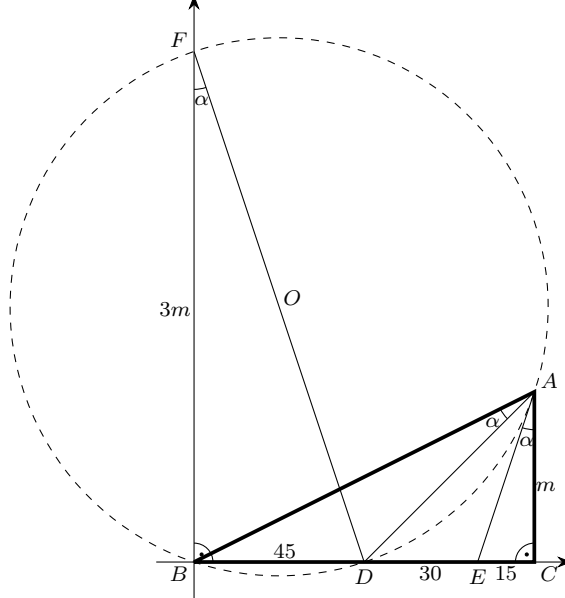
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

17. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Helyezzük bele az ábrát egy derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy B pont az origóba, a BC szakasz pedig az X tengely pozitív részére essen. Továbbá legyen F olyan pont az ábrában, hogy $BF = 3m$ és $BF \perp BC$ az ábra szerint. Kössük össze F pontot D -vel is. Legyen O az FD szakasz felezőpontja.



$BDF\triangle \sim ECA\triangle$, hiszen a befogók háromszorosak, tehát $BFD\angle = \alpha$.

Az egyes pontok koordinátái ekkor

$$A(90; m), B(0; 0), C(90; 0), D(45; 0), E(75; 0), F(0; 3m), O\left(22,5; \frac{3}{2}m\right)$$

A BD szakasz mind A pontból, mind F pontból ugyanakkora szög alatt látszik, tehát $B; D; A; F$ pontok egy körön vannak.

Ez a kör megegyezik a $BDF\triangle$ köré írt körrel, aminek a középpontja az átfogó felénél (O pont) van, sugara pedig az átfogó hosszának a fele. Ebben a körben AB egy húr, aminek a felező merőleges egyenese átmegy a kör középpontján.

Az AB egyenes egyenlete

$$y = \frac{m}{90} \cdot x$$

Az AB felezőpontján átmenő, AB -re merőleges egyenes egyenlete

$$y = -\frac{90}{m} \cdot x + \frac{m^2 + 2 \cdot 45 \cdot 90}{2 \cdot m}$$

Ez az egyenes átmegy az O ponton, azaz

$$\frac{3}{2} \cdot m = -\frac{90}{m} \cdot 22,5 + \frac{m^2 + 2 \cdot 45 \cdot 90}{2 \cdot m}$$

$$3 \cdot m^2 = -90 \cdot 45 + (m^2 + 8100)$$

$$m^2 = 45^2$$

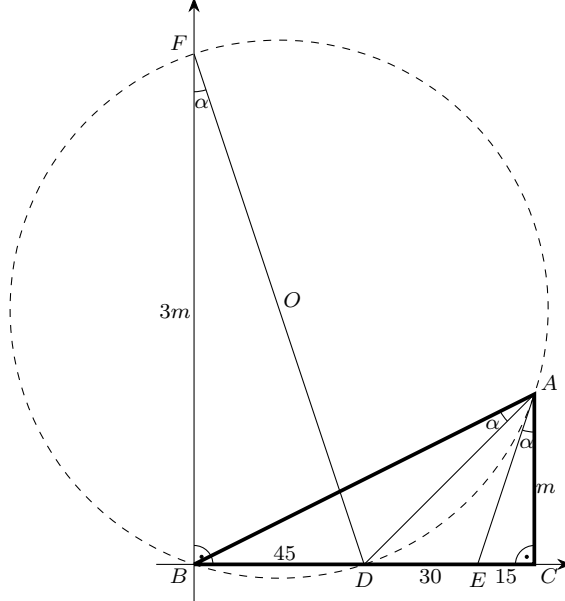
$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

18. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Helyezzük bele az ábrát egy derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy B pont az origóba, a BC szakasz pedig az X tengely pozitív részére essen. Továbbá legyen F olyan pont az ábrában, hogy $BF = 3m$ és $BF \perp BC$ az ábra szerint. Kössük össze F pontot D -vel is. Legyen O az FD szakasz felezőpontja.



$BDF\triangle \sim ECA\triangle$, hiszen a befogók háromszorosak, tehát $BFD\angle = \alpha$.

Az egyes pontok koordinátái ekkor

$$A(90; m), B(0; 0), C(90; 0), D(45; 0), E(75; 0), F(0; 3m), O\left(22, 5; \frac{3}{2}m\right)$$

A BD szakasz mind A pontból, mind F pontból ugyanakkora szög alatt látszik, tehát $B; D; A; F$ pontok egy körön vannak.

Ez a kör megegyezik a $BDF\triangle$ köré írt körrel, aminek a középpontja az átfogó felénél (O pont) van, sugara pedig az átfogó hosszának a fele. Ebben a körben AB egy húr, aminek a felező merőleges egyenese átmegy a kör középpontján.

A $B; D; F$ pontokon átmenő kör egyenlete (középpont O ; a sugár $FO = OD = \frac{1}{2} \cdot FD$)

$$(x - 22, 5)^2 + \left(y - \frac{3}{2} \cdot m\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3m)^2 + 45^2}\right)^2$$

Ez a kör átmegy az A ponton is

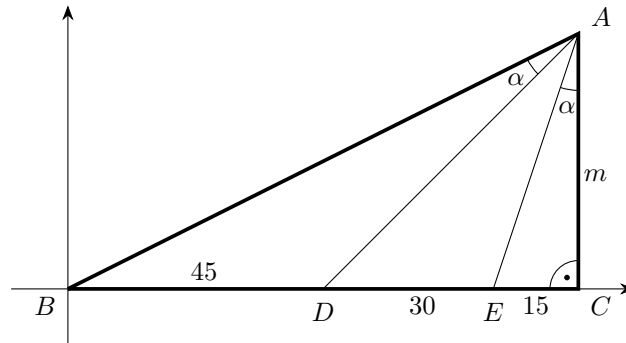
$$\begin{aligned} (90 - 22, 5)^2 + \left(m - \frac{3}{2} \cdot m\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3m)^2 + 45^2}\right)^2 \\ 135^2 + m^2 &= 9m^2 + 45^2 \\ m^2 &= 45^2 \\ m &= 45 \end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\triangle} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

19. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Helyezzük bele az ábrát egy derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy B pont az origóba, a BC szakasz pedig az X tengely pozitív részére essen.



Az egyes pontok koordinátái ekkor

$$A(90; m), B(0; 0), C(90; 0), D(45; 0), E(75; 0)$$

Nézzük az egyes oldalak vektorait és hosszukat

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (-90; -m); & |\vec{AB}| &= \sqrt{90^2 + m^2}; & \vec{AD} &= (-45; -m); & |\vec{AD}| &= \sqrt{45^2 + m^2}; \\ \vec{AE} &= (-15; -m); & |\vec{AE}| &= \sqrt{15^2 + m^2}; & \vec{AC} &= (0; -m); & |\vec{AC}| &= \sqrt{0^2 + m^2};\end{aligned}$$

Használjuk a skaláris szorzatot kétszer az α szöget tartalmazó háromszögekben

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AD} &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos \alpha = (-90) \cdot (-45) + (-m) \cdot (-m) \\ \cos \alpha &= \frac{90 \cdot 45 + m^2}{\sqrt{90^2 + m^2} \cdot \sqrt{45^2 + m^2}} \\ \vec{AE} \cdot \vec{AC} &= |\vec{AE}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \alpha = (-15) \cdot 0 + (-m) \cdot (-m) \\ \cos \alpha &= \frac{m^2}{\sqrt{15^2 + m^2} \cdot \sqrt{m^2}}\end{aligned}$$

A kétféle módon számolt $\cos \alpha$ megegyezik, tehát

$$\frac{1\,350 + m^2}{\sqrt{90^2 + m^2} \cdot \sqrt{45^2 + m^2}} = \frac{m^2}{\sqrt{15^2 + m^2} \cdot \sqrt{m^2}}$$

Ezt megoldva

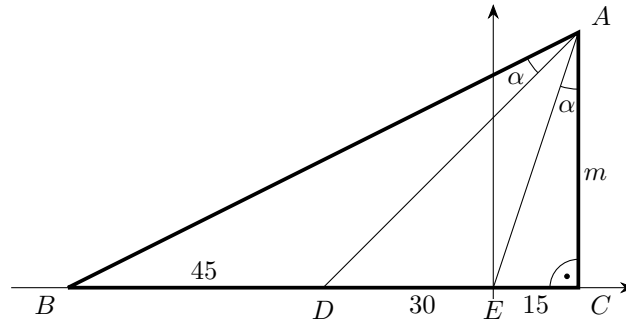
$$\begin{aligned}\frac{(1\,350 + m^2)^2}{(90^2 + m^2) \cdot (45^2 + m^2)} &= \frac{m^4}{(15^2 + m^2) \cdot m^2} \\ (1\,350 + m^2)^2 \cdot (15^2 + m^2) &= (90^2 + m^2) \cdot (45^2 + m^2) \cdot m^2 \\ 0 &= 2m^4 - 2\,025m^2 - 4\,100\,625 \\ m^2 &= 2\,025 \\ m &= 45\end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2\,025$$

20. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Helyezzük bele az ábrát egy derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy E pont az origóba, a EC szakasz pedig az X tengely pozitív részére essen.



Az egyes pontok koordinátái ekkor

$$A(15; m), B(-75; 0), C(15; 0), D(-30; 0), E(0; 0)$$

Skaláris szorzatot használva

$$\begin{aligned}\vec{EA} \cdot \vec{EC} &= |\vec{EA}| \cdot |\vec{EC}| \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{\vec{EA} \cdot \vec{EC}}{|\vec{EA}| \cdot |\vec{EC}|} = \frac{225}{15 \cdot \sqrt{m^2 + 225}} = \sin \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{15}{\sqrt{m^2 + 225}}\end{aligned}$$

Alkalmazzuk ismét a skaláris szorzatot

$$\begin{aligned}\vec{AD} \cdot \vec{AB} &= |\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{m^2 + 4050}{\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100}} \\ \cos \alpha &= \frac{m^2 + 4050}{\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100}}\end{aligned}$$

Trigonometrikus Pitagorasz tételét alkalmazva

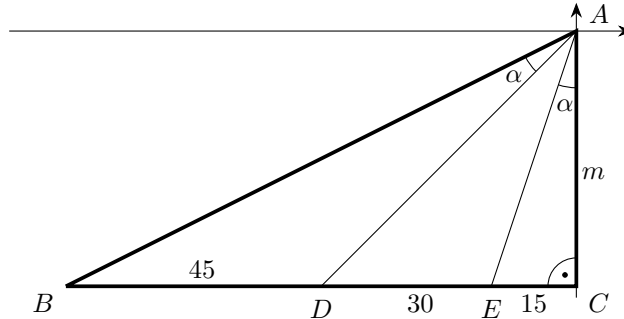
$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \left(\frac{15}{\sqrt{m^2 + 225}} \right)^2 + \left(\frac{m^2 + 4050}{\sqrt{m^2 + 2025} \cdot \sqrt{m^2 + 8100}} \right)^2 &= 1 \\ \frac{15^2}{m^2 + 225} + \frac{(m^2 + 4050)^2}{(m^2 + 2025) \cdot (m^2 + 8100)} &= 1 \\ m^2 &= 2025 \\ m &= 45\end{aligned}$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

21. Megoldás

A feladat szövege alapján rajzoljunk ábrát. Helyezzük bele az ábrát egy derékszögű koordinátarendszerbe úgy, hogy A pont az origóba, a BC szakasz pedig legyen párhuzamos az X tengellyel.



Az egyes pontok koordinátái ekkor

$$A(0;0), B(-90;-m), C(0;-m), D(-45;-m), E(-15;-m)$$

Az AB egyenes meredeksége: $\frac{m}{90}$.

Az AD egyenes meredeksége: $\frac{m}{45}$.

Az AD és AB egyenesek által bezárt szög (ami α) tangense (ami az ECA háromszögből kiolvasható $\frac{15}{m}$) a függvénytáblát használva

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\frac{\frac{m}{45} - \frac{m}{90}}{1 + \frac{m}{45} \cdot \frac{m}{90}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{m}$$

$$\frac{\frac{m}{90}}{1 + \frac{m^2}{4050}} = \frac{15}{m}$$

$$\frac{m^2}{1350} = 1 + \frac{m^2}{4050}$$

$$m^2 = 2025$$

$$m = 45$$

a keresett terület pedig

$$t_{ABC\Delta} = \frac{90 \cdot 45}{2} = 2025$$

Gyakorláshoz

Végül mellékelünk egy nagy ábrát, ha valaki szeretne további megoldásokat keresni.

