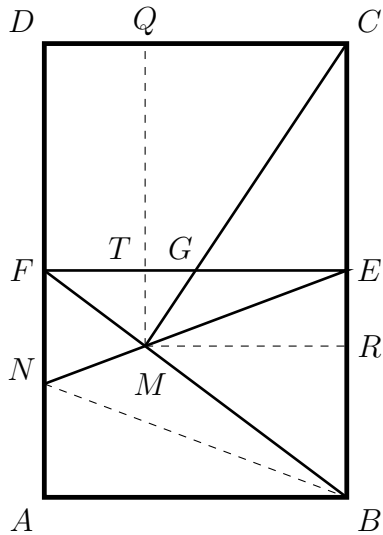


Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$ és $BC = DA = b$.



Húzzunk párhuzamosokat a téglalap oldalaival az M ponton keresztül, a metszéspontokat megjelöltük. Legyen $FG = x$ (ezzel $EG = a - x$) és $FS = y$.

Az $BEFN$ trapéz átlói egymást $1 : 2$ arányban osztják, hiszen ez a párhuzamos oldalaik arány. Kapjuk:

$$RM = \frac{2}{3}a; \quad RE = \frac{1}{6}b; \quad RC = \frac{4}{6}b$$

A GEC és MRC háromszögek hasonlóak, a hasonlóságot felírva:

$$\frac{GE}{EC} = \frac{MR}{RC}$$

azaz

$$\frac{GE}{\frac{3}{6}b} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{4}{6}b}$$

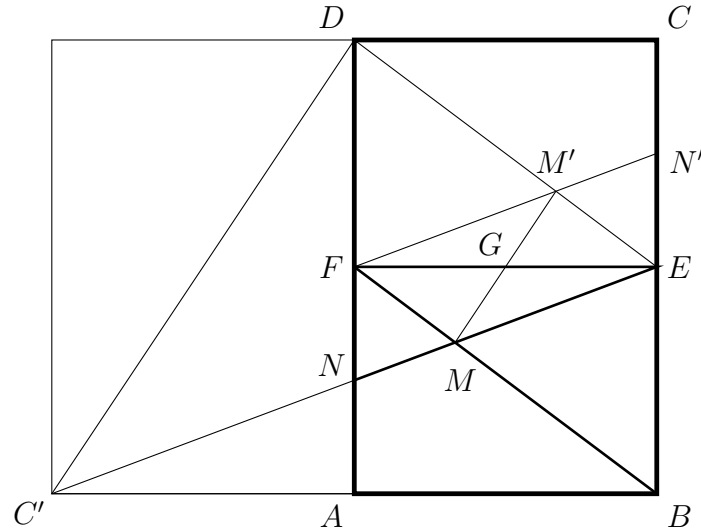
$$GE = \frac{1}{2}a$$

vagyis G az EF szakasz felezőpontja, és ezért

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

3. megoldás

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk. Rejzoljunk a téglalapunk mellé egy másik ugyanilyen téglalapot.



Az MEM' és a $C'ED$ háromszögek hasonlóak és oldalaik párhuzamosak, tehát

$$C'D \parallel MM'$$

Az $EMEM'$ négyszög paralelogramma, átlói felezik egymást, tehát G felezőpont.

CA párhuzamos DC' , mert két egybevágó téglalap egymás mellett. Így

$$CA \parallel MM'$$

Ráadásul CA átmegy a G ponton is, mert az az átlók metszéspontja, amin az MM' is átmegy, tehát illeszkedve egymásra.

Ez azt jelenti, hogy a keresett metszéspont a G és így

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

4. megoldás

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk.

Az E ponton keresztül párhuzamost húzunk a CM egyenessel, ez a párhuzamos a BF szakaszt a H pontban metszi.

Az FNM és BEM háromszögekben $FNM \sphericalangle = BEM \sphericalangle$, mert váltószögek. Hasonlóképpen váltószögek $NFM \sphericalangle$ és $EBM \sphericalangle$, tehát ezek is egyenlők, végül $FMN \sphericalangle = BME \sphericalangle$, mert csúcsszögek.

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az FNM és BEM háromszögek hasonlóak, a megfelelő oldalak aránya

$$\frac{FN}{BE} = \frac{1}{2}$$

mivel N felezi a BE -vel egyenlő hosszúságú FA oldalt.

Tekintsük most a BCM háromszöget. Ebben EH középvonal, mert E felezi BC -t és $EH \parallel CM$.

Ez azt jelenti, hogy a BM szakasz felezőpontja H .

Nyilvánvaló, hogy az FNM és BEM hasonló háromszögekben

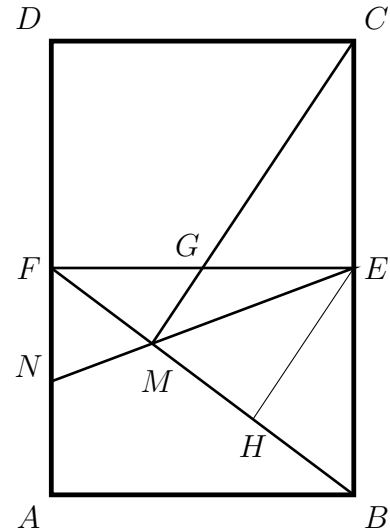
$$\frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$$

is igaz, amelyből $BM = 2FM$ következik, és mivel a BM felezőpontja H , ezért az FH szakasz felezőpontja M .

Az EFH háromszögben $GM \parallel EH$ és M felezi FH -t, tehát GM középvonala az EFH háromszögnek.

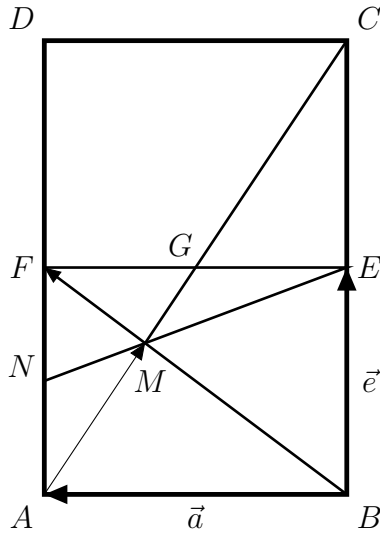
A GM középvonal ezért felezi az EF oldalt is, azaz

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$



5. megoldás

Vezessük be a következő vektorjelöléseket: $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{e} = \overrightarrow{BE}$.



Az FN és BE szakaszok párhuzamossága miatt $\angle FNM = \angle BEM$, illetve $\angle NFM = \angle EBM$ váltószögek, tehát $\angle FNM = \angle BEM$, illetve $\angle NFM = \angle EBM$. Ugyanakkor teljesül $\angle FMN = \angle BME$ is, mert csúcsszögek.

A megfelelő szögek egyenlősége miatt az FNM és BEM háromszögek hasonlóak, és mivel N felezi a BE -vel azonos hosszúságú FA oldalt, ezért a hasonlóság aránya

$$\frac{FN}{BE} = \frac{NM}{EM} = \frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$$

Választott jelöléseinkkel egyrészt $\overrightarrow{BC} = 2\vec{e}$, valamint $\overrightarrow{BF} = \vec{a} + \vec{e}$, és az $\frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$ arány miatt

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{e})$$

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}$, ezért az előzőek szerint $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{e}) - \vec{a}$, azaz

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{e} - \frac{1}{3}\vec{a}$$

Világos továbbá, hogy $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$, vagyis

$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{e} - \vec{a}$$

Az előzőek szerint az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok egyirányúak, amely csakis úgy lehetséges, ha az A , M és C pontok egy egyenesen vannak, és nyilvánvaló, hogy erre az egyenesre illeszkedik a G pont is.

Ez esetben az ABC háromszögben EG középvonal, ami azt is jelenti, hogy $EG = \frac{BA}{2}$, és mivel $EF = BA$, ezért

$$EG = \frac{EF}{2}$$

Eszerint tehát G felezi az EF szakaszt, és így

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

6. megoldás

Legyen az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = CD = a$ és $BC = DA = b$.

Húzzunk párhuzamosokat a téglalap oldalaiival az M ponton keresztül, a metszéspontokat megjelöltük. Legyen $FG = x$ (ezzel $EG = a - x$) és $FS = y$.

Az FNM és BEM háromszögek hasonló, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak így szögeik megegyeznek.

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya egyenlő, ezért a hasonlóság aránya

$$\frac{FN}{BE} = \frac{NM}{EM} = \frac{FM}{BM} = \frac{1}{2}$$

mivel N felezi FA oldalt.

Hasonló háromszögekben a egymásnak megfelelő szakaszok aránya megegyezik a hasonlóság arányával

$$\frac{SM}{RM} = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{FS}{BR} = \frac{1}{2}$$

amelyből

$$SM = FT = AP = \frac{a}{3}, \quad RM = ET = BP = \frac{2a}{3}, \quad BR = 2y$$

Mivel $FS = MT = ER = y$ és $BR = 2y$, továbbá $ER + BR = 3y = \frac{b}{2}$, ezért $y = \frac{b}{6}$.

Az MTG és MQC derékszögű háromszögekben az MT, MQ illetve MG, MC oldalak egy egyenesre esnek, illetve $TG \parallel QC$, tehát ez a két háromszög hasonló, a megfelelő oldalak aránya $\frac{MT}{CQ} = \frac{MG}{MC}$, ahonnan

$$\frac{x - \frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}} = \frac{\frac{b}{6}}{\frac{b}{6} + \frac{b}{2}}$$

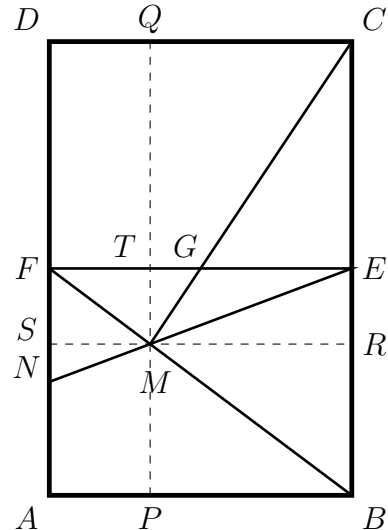
hiszen $GT = FG - FT = x - \frac{a}{3}$, $CQ = BP = \frac{2a}{3}$, illetve $MT = y = \frac{b}{6}$ és $MQ = MT + TQ = \frac{b}{6} + \frac{b}{2}$.

A műveletek elvégzésével, rendezéssel és egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{3a}{6} = \frac{a}{2}$$

azaz G felezőpontja az EF szakasznak, és ezért

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$



7. megoldás

Helyezzük el az $ABCD$ téglalapot a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A pont az origóban legyen, a B pont az x -tengelyre, a D pont az y -tengelyre illeszkedjen. A téglalap elhelyezése miatt nyilvánvaló, hogy a pontok koordinátaiban szereplő b és c számok pozitívak.

Az NE egyenes meredekségére

$$m_{NE} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{4}}{b} = \frac{c}{4b}$$

és mivel az egyenes az y -tengelyt az $N(0; \frac{c}{4})$ pontban metszi, ezért az NE egyenes egyenlete

$$y = \frac{c}{4b}x + \frac{c}{4}$$

Az FB egyenes meredeksége

$$m_{FB} = \frac{0 - \frac{c}{2}}{b} = \frac{-c}{2b}$$

az egyenes az y -tengelyt az $F(0; \frac{c}{2})$ pontban metszi, ezért az egyenes egyenlete

$$y = \frac{-c}{2b}x + \frac{c}{2}$$

Az egyenletrendszer megoldásával $x = \frac{b}{3}$ és $y = \frac{c}{3}$, ezért az NE és FB egyenesek M metszéspontjának koordinátái $M(\frac{b}{3}; \frac{c}{3})$.

Az MC egyenes egy irányvektorának koordinátái $\vec{v}_{MC}(b - \frac{b}{3}; c - \frac{c}{3}) = (\frac{2b}{3}; \frac{2c}{3})$, ahonnan az egyenes egy másik irányvektora $\vec{v}_{MC}(b; c)$.

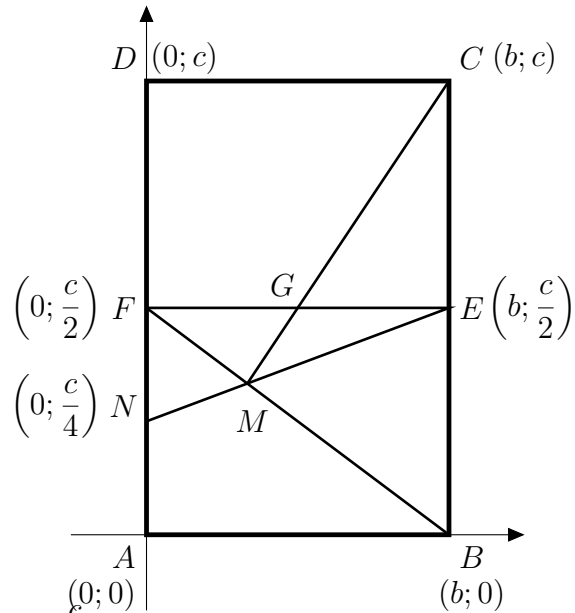
Az egyenes áthalad a $C(b; c)$ ponton, ezért MC egyenlete $cx - by = c \cdot b - b \cdot c (= 0)$, ahonnan

$$y = \frac{c}{b}x$$

A G pont az $y = \frac{c}{2}$ egyenletű EF egyenesre illeszkedik, ezért G koordinátáit úgy kapjuk meg, ha megoldjuk az $y = \frac{c}{2}$ és a (3) egyenletekből álló egyenletrendszert. Egyszerű számítással adódik, hogy $x = \frac{b}{2}$ és $y = \frac{c}{2}$, tehát $G(\frac{b}{2}; \frac{c}{2})$.

A G pont első koordinátája pontosan azt jelenti, hogy G felezi az EF szakaszt, és így

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$



8. megoldás

Helyezzük el az $ABCD$ téglalapot a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az A pont az origóban legyen, a B pont az x -tengelyre, a D pont az y -tengelyre illeszkedjen. A téglalap elhelyezése miatt nyilvánvaló, hogy a pontok koordinátaiban szereplő b és c számok pozitívak.

Osztópontokat fogunk számolni.

Az M pont harmadolópont a BF és NE szakaszon is: $FM : MB = 1 : 2$. Ezt koordinátákkal számolva:

$$M \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3} \right)$$

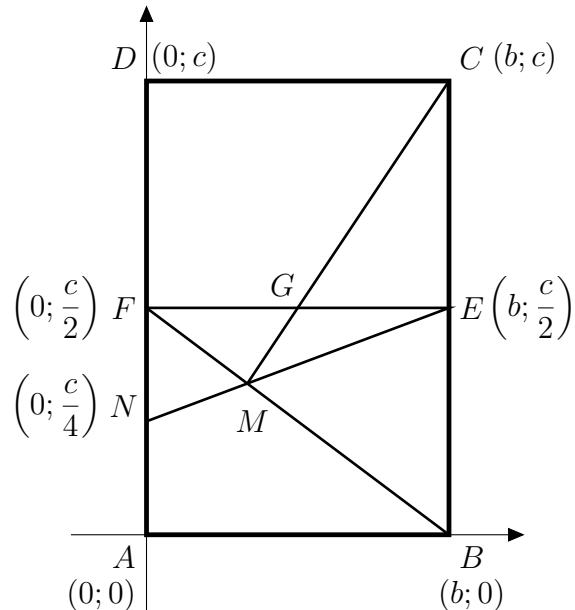
Nézzük most a CM szakasz negyedelő pontját, mely az M ponthoz van közelebb (legyen ez X):

$$X \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Azt látjuk róla, hogy a pont az FM szakaszra esik (második koordinátáján látszik), tehát ez a keresett G pont.

Első koordinátája pedig azt mutatja, hogy ez egy felezőpont, tehát

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

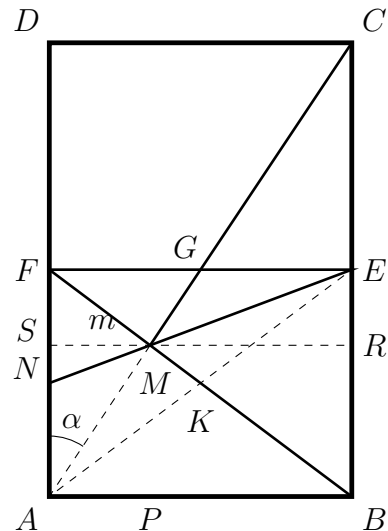


9. megoldás

Húzzunk párhuzamost az AB oldallal az M ponton keresztül. Ez az egyenes a BC oldalt az R , a DA oldalt az S pontban metszi. Az ábrán $MS = m$, illetve $FS = s$, továbbá az AE és a BF szakaszok metszéspontja K .

Az $ABEF$ téglalap szimmetriaközéppontja a K pont, ezért K felezi az AE szakaszt, N pedig felezi az AF szakaszt, tehát FK és EN az AEF háromszög súlyvonalai, és így M a háromszög súlypontja.

A súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért $EM = 2MN$, valamint $FM = 2MK$. A K pont nyilván felezi a BF szakaszt is, így az előző eredményünk alapján $BK = FK = 3MK$, ebből $BM = 4MK$ következik.



Az FSM és BRM derékszögű háromszögekben $FMS \sphericalangle = BMR \sphericalangle$, mert csúcsszögek, ezért a két háromszög megfelelő szögei egyenlők, vagyis a háromszögek hasonlóak. Megfelelő oldalaik aránya az átfogók arányával megegyezik, ez pedig $\frac{FM}{BM} = \frac{FM}{4MK} = \frac{1}{2}$, hiszen $FM = 2MK$. Ebből azt kapjuk, hogy $MR = 2m$ és $BR = AS = 2s$, de akkor $\Re = s$ miatt $BE = CE = 3s$, illetve $BC = 6s$.

Bebizonyítjuk, hogy az A, M, C pontok egy egyenesen vannak.

Felírjuk az AMS és CMR derékszögű háromszögekben az α és γ hegyesszögek tangensét.

$$\text{Eszerint } \operatorname{tg} \alpha = \frac{MS}{AS} = \frac{m}{2s}, \text{ illetve } \operatorname{tg} \gamma = \frac{MR}{CR} = \frac{2m}{4s} = \frac{m}{2s}.$$

Ez csakis úgy lehetséges, ha az α és γ hegyesszögek egyenlő nagyságúak. Ekkor viszont $AS \parallel CR$, valamint $\alpha = \gamma$ miatt szükségképpen $AM \parallel CM$, ez pedig azt jelenti, hogy az AM és CM szakaszok tartóegyenese azonos, tehát az A, M, C pontok valóban egy egyenesen vannak.

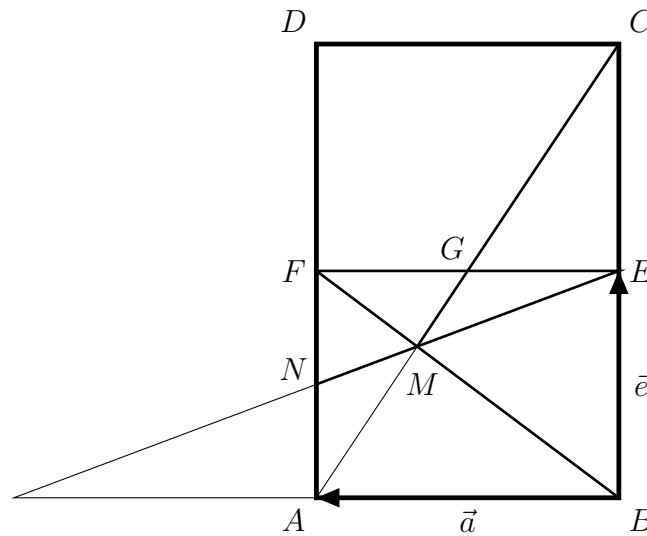
Ebből azonnal következik, hogy az $A, [200B?][200B?][200B?][200B?]M, [200B?][200B?][200B?][200B?]G$ pontok is egy egyenesre esnek, vagyis AG az AEF háromszög harmadik súlyvonala, és így G az EF szakasz felezőpontja.

Ennek megfelelően

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

10. megoldás

Legyen $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$



Ekkor kétféle módon felírva a $\overrightarrow{BF}$ vektor

$$\overrightarrow{BM} = \begin{cases} \alpha \overrightarrow{BF} = \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \\ \overrightarrow{BE} + \beta \cdot \overrightarrow{EC} = \vec{b} + \beta \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\beta \cdot \vec{a} + (1 - \beta)\vec{b} \end{cases}$$

valamely megfelelő α és β számokra. Az egyértelmű vektor felbontás miatt

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}; \beta = \frac{1}{3}$$

azaz

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

Ugyanígy kétféle módon felírva a $\overrightarrow{BG}$ vektor

$$\overrightarrow{BG} = \begin{cases} \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG} = \gamma \cdot \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{BC} + \gamma \overrightarrow{CG} = \delta \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - 2\vec{b}\right) + 2\vec{b} = \frac{2}{3}\delta \cdot \vec{a} + \left(2 - \frac{4}{3}\delta\right)\vec{b} \end{cases}$$

valamely megfelelő γ és δ számokra. Az egyértelmű vektor felbontás miatt

$$\begin{cases} \gamma = \frac{2}{3}\delta \\ 1 = 2 - \frac{4}{3}\delta \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}; \delta = \frac{3}{4}$$

azaz

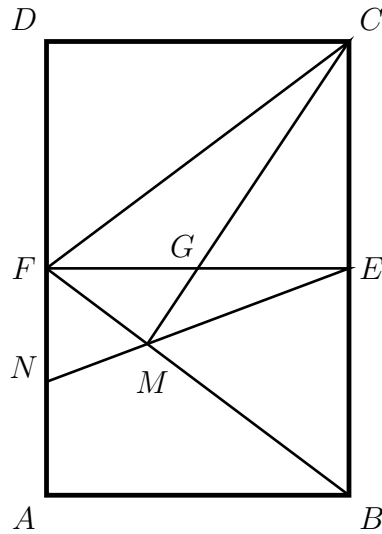
$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

tehát G felezőpont. Ennek megfelelően

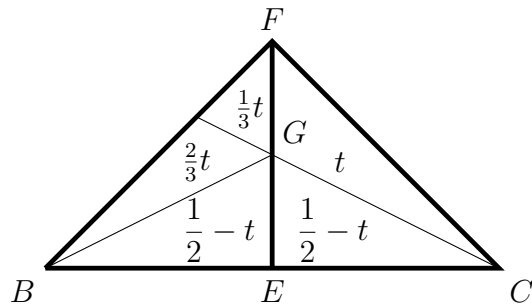
$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$

11. megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit.



Tudva, hogy M harmadolópont, tekintsük a BCF háromszöget. Legyen ennek a háromszögnek a területe t . A megfelelő részek területét beírva:



Területek arányát felírva

$$\frac{\frac{2}{3}t + 2\left(\frac{1}{2} - t\right)}{\frac{1}{3}t + t} = \frac{2}{1}$$

Megoldva kapjuk

$$t = \frac{1}{4}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy GE fele magasságban van, azaz G felezőpont.

$$\frac{EG}{FG} = \frac{1}{1}$$