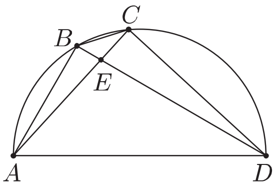
4. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját. Határozza meg az $AE \cdot AC + DB \cdot DE$ kifejezés pontos értékét! (10 pont)

Megoldás.



Thalész tétele miatt ABD derékszögű háromszög, így a Pitagorasz-tételt felírva

$$AD^2 = AB^2 + (EB + DE)^2,$$

ahonnan

$$AD^2 = AB^2 + EB^2 + DE^2 + 2 \cdot EB \cdot DE. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel AEB is derékszögű háromszög, ezért $AB^2 + EB^2 = AE^2$, ezenkívül

$$EB = DB - DE,$$

így

$$AD^2 = AE^2 - DE^2 + 2 \cdot DB \cdot DE. \qquad \text{(3 pont)}$$

Hasonlóan kapjuk az ACD és ECD derékszögű háromszögekből, hogy

$$AD^2 = DE^2 - AE^2 + 2 \cdot AE \cdot AC. \qquad \text{(3 pont)}$$

Összegezve az előbbi két egyenlőséget adódik, $AD^2 = AE \cdot AC + DB \cdot DE$, tehát

$$AE \cdot AC + DB \cdot DE = 1. \qquad \text{(2 pont)}$$