2. $a)$ Adjon meg egy olyan különböző pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

$b)$ Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan különböző pozitív egész számokból álló 11 elemű halmaz, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

Megoldás. $a)$ Legyen a halmaz elemeinek 6-tal való osztási maradéka rendre 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1! Ekkor, ha a kiválasztott 6 szám közé k db ($k = 1, 2, \ldots, 5$) 6-tal osztva 1 maradékot adó szám kerül, akkor az összeg is 6-tal osztva k maradékot fog adni. 2 pont

Például a $H = \{6; 12; 18; 24; 30; 1; 7; 13; 19; 25\}$ halmaz megfelelő. 1 pont

$b)$ A skatulyaelv értelmében három különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható kettő, amelynek paritása megegyezik, így összegük páros. Ezért 11 különböző pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 5 számpár, amelyek tagjainak összege páros. 3 pont

Az így kapott 5 (kételemű) összeg között vagy van három, amelyek 3-mal osztva különböző maradékot adnak, vagy van három, amelyek 3-mal osztva azonos maradékot adnak (skatulyaelv). Ennek a három összegnek az összege osztható 3-mal. 3 pont

Mivel mindhárom összeg páros, így az összegük osztható 2-vel is, így $2 \cdot 3 = 6$-tal is. Ezzel a módszerrel találtunk 6 számot, amelyek összege osztható 6-tal. 1 pont