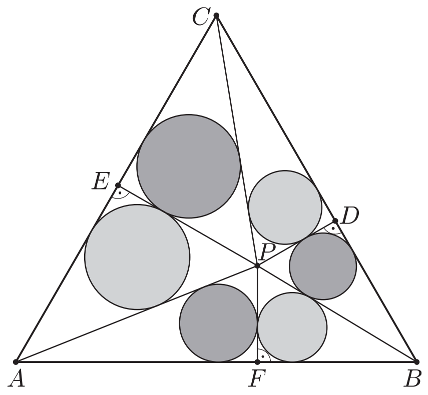


1. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P-ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai.

Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCE, illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk.

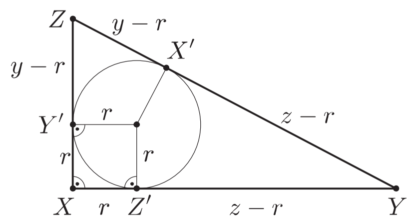
Megoldás. Használjuk fel az alábbi lemmát:

Az XYZ derékszögű háromszögben, ha a $ZXY\sphericalangle = 90°$, akkor a beírt kör sugara $r = \dfrac{1}{2}(y + z - x)$, ahol x, y, z jelöli a háromszög megfelelő oldalainak hosszát.

A lemma igazolása:

Ha X', Y', Z' jelöli az érintési pontokat, akkor felhasználva, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak

$$YZ = YX' + X'Z = YZ' + ZY' = XY - XZ' + ZX - XY'.$$



Tehát

$$x = z - r + y - r,$$

amiből

$$r = \frac{1}{2}(y + z - x).$$

2 pont

A lemma alapján a feladat állításának igazolásához elegendő belátni, hogy

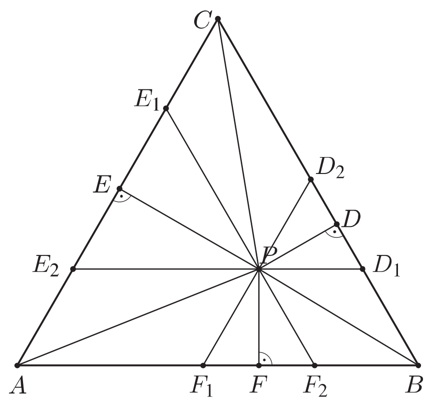
$$\frac{1}{2}\left[(AF + FP - PA) + (BD + DP - PB) + (CE + EP - PC)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(BF + FP - PB) + (CD + DP - PC) + (AE + EP - PA)\right],$$

ami ekvivalens az $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ egyenlőséggel. 2 pont

Húzzunk párhuzamosokat a P ponton keresztül az ABC háromszög oldalaival. A BC, CA, AB oldalakon keletkező metszéspontokat jelöljük az ábra szerint D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2-vel. A keletkező D_1D_2P, E_1E_2P, F_1F_2P háromszögek szabályosak lesznek, mivel szögeik egyállásúak az ABC háromszög szögeivel. 2 pont

Az AF_1D_2C, BD_1E_2A, CE_1F_2B szimmetrikus trapézok szárainak egyenlőségét felhasználva:



(1) $$AF_1 = CD_2,$$

(2) $$BD_1 = AE_2,$$

(3) $$CE_1 = BF_2.$$ 2 pont

Mivel a szabályos háromszög magassága felezi a hozzá tartozó oldalt, ezért

(4) $$F_1F = F_2F,$$

(5) $$D_1D = D_2D,$$

(6) $$E_1E = E_2E.$$ 1 pont

A 6 számozott összefüggés megfelelő oldalait összeadva:

$$AF_1 + F_1F + BD_1 + D_1D + CE_1 + E_1E = AE_2 + E_2E + BF_2 + F_2F + CD_2 + D_2D,$$

$$AF + BD + CE = AE + BF + CD$$ 1 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.