2. Mely $n \geqq 3$ egész számok esetén létezik n darab páronként különböző pozitív egész szám úgy, hogy mindegyik osztója a többi összegének?

Megoldás. Legyenek ezek a számok $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Az oszthatósági feltétel pontosan akkor teljesül, ha mindegyikük osztója $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$-nek, vagyis ha minden $1 \leqq i \leqq n$ esetén létezik olyan k_i pozitív egész szám, hogy $S = k_i a_i$, azaz $a_i = S/k_i$. 2 pont

Mivel S éppen az a_i számok összege, ezért $\sum 1/k_i = 1$, $1 \leqq i \leqq n$. Ezért először olyan k_i páronként különböző pozitív egész számokat keresünk, melyek reciprokösszege 1. 1 pont

Belátjuk, hogy ilyenek minden $n \geqq 3$ esetén léteznek. Ha $n = 3$, akkor $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 6$ megfelelő választás. 1 pont

Ha pedig valamely $n \geqq 3$-ra már sikerült megadni n darab páronként különböző pozitív egész számot, melyek reciprokösszege 1, akkor közülük a legnagyobbat (ezt jelöljük y-nal) elhagyva, és $y+1$-et, valamint $y(y+1)$-et bevéve $n+1$ páronként különböző pozitív egész számot kapunk, amelyek reciprokösszege szintén 1, hiszen $1/y = 1/(y+1) + 1/\big[y(y+1)\big]$. Innen indukcióval következik az állítás. 3 pont

Tegyük fel tehát, hogy találtunk már olyan $k_1, k_2, \ldots, k_n$ páronként különböző pozitív egész számokat, melyek reciprokösszege 1. Legyen K a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ számok legkisebb közös többszöröse. Ekkor $a_i = K/k_i$ számok ($1 \leqq i \leqq K$) olyan páronként különböző pozitív egészek, amelyek összege K, és minden i-re teljesül, hogy $a_i \mid K$. Beláttuk, hogy minden $n \geqq 3$-ra léteznek ilyen számok. 3 pont

Megjegyzés: A k_i számokra egy másik lehetséges konstrukció: $k_1 = 2$, $k_2 = 2^2$, $\ldots$, $k_{n-2} = 2^{n-2}$, $k_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$, $k_n = 3 \cdot 2^{n-2}$. Ezzel a választással $K = 3 \cdot 2^{n-2}$, és így az $a_1 = 3 \cdot 2^{n-3}$, $a_2 = 3 \cdot 2^{n-4}$, $\ldots$, $a_{n-2} = 3$, $a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$ megoldás adódik.

(Aki bármilyen módon minden $n \geqq 3$-ra megad egy helyes konstrukciót, az 3 pontot kap, a fennmaradó 7 pont a konstrukció helyességének igazolásáért jár.)