5. Két szám szorzata $a \cdot b = -1$. Ugyanezen két szám összege $a + b = 1$. Bizonyítsd be, hogy az $S = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + a^4 + b^4 + \ldots + a^8 + b^8$ kifejezés egy egész szám, és add meg a pontos értékét!

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy van két olyan a, b szám, amelyik kielégíti a feladat feltételeit.

Ehhez kifejezzük b-t $b = 1 - a$ alakban, majd beírjuk a másik feltételbe:

$$a(1-a) = -1 \longrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \longrightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vagyis pl. (ha $a > b$) $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ kielégítik a két feltételt. 1 pont

Innen sokféleképp folytatható a feladat. (A megjegyzésben pár lehetséges folytatást leírunk majd.) A fennmaradó rész jó megoldása még 6 pontot ér!

Legyen $s_1 = a^1 + b^1 = a + b = 1$, $s_2 = a^2 + b^2$, $\ldots$, $s_n = a^n + b^n$.

Ezzel a jelöléssel $S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_8$ a kérdés.

$$s_2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$ 1 pont

Másfelől tekintsük a következő egyenlőséget: ($n > 1$).

$$s_n = a^n + b^n = 1 \cdot (a^n + b^n) = (a+b) \cdot (a^n + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right).$$

Vagyis $s_n = a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot b \cdot \left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) = s_{n+1} - s_{n-1}$, innen $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$ adódik. 3 pont

Innen $s_1 = 1$; $s_2 = 3 \to s_3 = 4 \to s_4 = 7 \to s_5 = 11 \to s_6 = 18 \to s_7 = 29 \to s_8 = 47$.

Vagyis $= 1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 = 120$. 2 pont

Vagyis $S = 120$.

Összesen: 7 pont

Megjegyzések: a) Egy lehetséges „csúnya” megoldás: Használjuk a véges mértani sorozat összegképletét! Ezzel

$$S = \left(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^8\right) + \left(1 + b + \ldots + b^8\right) - 2 = \frac{1-a^9}{1-a} + \frac{1-b^9}{1-b} - 2,$$

vagyis

$$S = \frac{1 - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} - 2 = \frac{1 - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - 2.$$

Innen a törteket bővítve a nevezők konjugáltjaival:

$$S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2 =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - 3$$

adódik.

Ezután kétszer alkalmazva a binomiális tételt a két 10-edik hatványra, és észrevéve, hogy a felbontás után az első tag számlálójában fennálló „páratlan” tagok éppen a második tag megfelelő „páratlan” tagjainak az ellentettjei és így ezek öszege: 0, míg a „páros” tagok közösek, adódik, hogy:

$$S = \frac{2 \cdot \left(1^2 + \binom{10}{2} \cdot 1^8 \cdot 5 + \binom{10}{4} \cdot 1^6 \cdot 5^2 + \binom{10}{6} \cdot 1^4 \cdot 5^3 + \binom{10}{8} \cdot 1^2 \cdot 5^4 + 5^5\right)}{2^{10}} - 3,$$

innen

$$S = \frac{1 + 45 \cdot 5 + 210 \cdot 25 + 210 \cdot 125 + 45 \cdot 625 + 3125}{2^9} - 3,$$

$$S = \frac{3126 + 45 \cdot 630 + 210 \cdot 150}{2^9} - 3 = \frac{62976}{512} - 3 = 123 - 3 = 120.$$

a') a-ból következik, hogy $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s_{n+2} - 3$.

b) Természetesen külön-külön mindegyik s_i is megkapható két-két binomiális tétellel az iménti megjegyzéshez hasonlóan, de az még több számolást igényel!

c) Az általunk s_n-nek nevezett sorozat a matematikában Lucas-sorozatként ismert.

A Lucas-sorozat nem rekurzív definíciójában $s_n = L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megjelenik az aranymetszés száma.

Minden Fibonacci-szerű sorozat ($f_1 = a$; $f_2 = b$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$) kifejezhető a Lucas-sorozat tagjai segítségével, és így az aranymetszés számaival is!