3. Milyen pozitív egész n-re lesz a $2^8 + 2^{11} + 2^n$ négyzetszám?

Megoldás. Legyen $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$, ahol a pozitív egész.

Átalakítva a bal oldali összeget kapjuk, hogy

$$2^8 + 2^{11} = 2^8\left(1 + 2^3\right) = 2^8 \cdot 9 = 2^8 \cdot 3^2 = \left(2^4 \cdot 3\right)^2 = 48^2,$$

így $48^2 + 2^n = a^2$. 1 pont

Rendezve és szorzattá alakítva

$$2^n = \left(a^2 - 48^2\right),$$

$$2^n = (a - 48)(a + 48).$$ 1 pont

A bal oldalon kettő-hatvány áll, a jobb oldalon egy szorzat. Az $a - 48 = 1$ vagy $a + 48 = 1$ nem vezet megoldásra.

Így a jobb oldalon a két tényező egy-egy kettő-hatvánnyal egyezik meg. Legyen

$$a + 48 = 2^k, \quad a - 48 = 2^{n-k},$$

ahol k egy n-nél kisebb pozitív egész, és $k > n - k$. 1 pont

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$96 = 2^k - 2^{n-k} = 2^{n-k}\left(2^{2k-n} - 1\right),$$

ahol 2^{n-k} és $2^{2k-n} - 1$ pozitív egész,

$$3 \cdot 2^5 = 2^{n-k}\left(2^{2k-n} - 1\right).$$ 1 pont

A 2^{n-k} nem osztható 3-mal, így $\left(2^{2k-n} - 1\right)$ $3 \cdot 2^m$ alakú, ahol m nem negatív és ötnél nem nagyobb egész. Ekkor

$$2^{2k-n} = 3 \cdot 2^m + 1.$$

Mivel a jobb oldal egynél nagyobb, ezért a bal oldal is. Ekkor viszont a bal oldal páros. A jobb oldal pedig csak akkor lesz páros, ha $m = 0$. 1 pont

Tehát $2^{2k-n} - 1 = 3$, így $2k - n = 2$ és $2^{n-k} = 2^5$, azaz $n - k = 5$. 1 pont

A

$$2k - n = 2,$$

$$n - k = 5$$

egyenletrendszer megoldása $k = 7$ és $n = 12$.

$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 2^8\left(1 + 2^3 + 2^4\right) = 2^8 \cdot 25 = \left(2^4 \cdot 5\right)^2 = 80^2$ valóban négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont