4. Létezik-e olyan 2 egység oldalhosszúságú rombusz, amelyben az átlók összege egész szám? Ha van ilyen, adja meg az átlók hosszának **pontos** értékét!

1. megoldás. Ha létezik ilyen rombusz, akkor az átlók felére és az oldalra felírt háromszög-egyenlőtlenség alapján $e/2 + f/2 > 2$, 1 pont

azaz $e + f > 4$, illetve $e < 4$, $f < 4$, azaz $e + f < 8$. 1 pont

Egész megoldás csak az 5, 6 vagy 7 lehet. 1 pont

Viszont az $e^2 + f^2 = 16$ egyenlőségnek is teljesülni kell az átlók merőlegessége miatt. 1 pont

Az egyenletrendszerek csak az $e + f = 5$ esetén adnak megoldást. 2 pont

Ekkor $e = \big(5 + \sqrt{7}\,\big)/2$, $f = \big(5 - \sqrt{7}\,\big)/2$, vagy fordítva. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az átlók merőlegessége miatt $e^2 + f^2 = 16$. 1 pont

Mivel $ef > 0$, ezért

$$16 = e^2 + f^2 < (e + f)^2 \leqq (e + f)^2 + (e - f)^2 = 2\big(e^2 + f^2\big) = 32.$$ 2 pont

16 és 32 között csak a 25 négyzetszám, azaz $e + f$ egyetlen lehetséges értéke 5. 2 pont

Az egyenletrendszer megoldása $e = \big(5 + \sqrt{7}\,\big)/2$, $f = \big(5 - \sqrt{7}\,\big)/2$, vagy fordítva. 2 pont

---

Összesen: 7 pont