1. Mely x és y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + xy \geqq x^2 + y^2 + 1? \qquad \text{(6 pont)}$$

Megoldás. A tagokat egy oldalra rendezve és 2-vel megszorozva az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$2\big(x^2 + y^2 + 1 - x - y - xy\big) \leqq 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből a baloldalt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 0. \qquad \text{(3 pont)}$$

A baloldal mindhárom tagja nem negatív, ezért mindhárom értéke csak 0 lehet, tehát: $x = y$, $x = 1$ és $y = 1$. Így az egyenlőtlenség csak az $x = 1$ és $y = 1$ számokra teljesül. (2 pont)