5. Legfeljebb mekkora lehet az $|a|+|b|+|c|$ kifejezés értéke, ha minden $-1 \leqq x \leqq 1$ esetén $\left|ax^2+bx+c\right| \leqq 100$? (10 pont)

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül vizsgálhatjuk azt az esetet, amikor $a \geqq 0$. ($a<0$ esetén a másodfokú kifejezést (-1)-gyel beszorozva továbbra is teljesülnek a feladat feltételei és az együtthatók abszolútértékeinek összege is változatlan marad.) (1 pont)

Másrészt $b<0$ esetén az értelmezési tartomány 0-ra vonatkozó szimmetriája miatt x helyére $(-x)$-et helyettesítve nyilván teljesül az $\left|ax^2-bx+c\right| \leqq 100$ feltétel, és az együtthatók abszolútértékeinek összege most is ugyanannyi marad. Így elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor $b \geqq 0$. (1 pont)

Tekintsük ezután az $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ x \in [-1;1])$ függvényt. Mivel $f(0)=c$ és $f(1)=a+b+c$, ezért a megadott feltétel alapján

$$|c| \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad |a+b+c| \leqq 100,$$

$$-100 \leqq c \leqq 100 \qquad \text{és} \qquad -100 \leqq a+b+c \leqq 100.$$ (2 pont)

$c \geqq 0$ esetén:

$$|a|+|b|+|c|=a+b+c \leqq 100.$$ (1 pont)

$c<0$ esetén pedig:

$$|a|+|b|+|c|=a+b-c=(a+b+c)-2c \leqq 100+200=300.$$ (2 pont)

Ez utóbbi felső korlát elérhető például az $f(x)=200x^2-100$ $x \in [-1;1]$ függvény esetén, ahol a függvény grafikonja olyan parabola, melynek csúcspontja a $(0;-100)$ pont, áthalad a $(-1;100)$, $(1;100)$ pontokon és $R_f=[-100;100]$. (2 pont)

Tehát a keresett kifejezés maximális értéke 300. (1 pont)