3. Határozzuk meg azon a és b valós számokat, amelyekre igaz, hogy a és b is gyöke az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek!

Megoldás. Mivel a és b is megoldása az egyenletnek, ezért helyettesítsük be az egyenletbe a-t:

$$a^2 + a^2 + b = 0.$$

Ebből $b = -2a^2$. b-t behelyettesítve kapjuk, hogy $b^2 + ab + b = 0$. 1 pont

Utóbbiba behelyettesítve a $b = -2a^2$-t $\left(-2a^2\right)^2 - 2a^3 - 2a^2 = 0$ adódik. 1 pont

$2a^2$-t kiemelve kapjuk, hogy $2a^2\left(2a^2 - a - 1\right) = 0$. 1 pont

Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Így megoldás, ha $a = 0$, $b = 0$, illetve ha a $2a^2 - a - 1 = 0$. 1 pont

Ha a és b is nulla, akkor a másodfokú egyenletünk az $x^2 = 0$ alakot ölti, melynek az a és b valóban megoldásai. 1 pont

Az $2a^2 - a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei az $a_1 = 1$ és az $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Ha $a = 1$, akkor $b = -2$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk $x^2 + x - 2 = 0$, amelynek $a = 1$ és $b = -2$ valóban a megoldásai. 1 pont

Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor a $b = -\frac{1}{2}$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk az $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, melynek viszont ezek az $a = -\frac{1}{2}$ és $b = -\frac{1}{2}$ értékek nem megoldásai. 1 pont

Tehát a feladatot a $(0; 0)$ és az $(1; -2)$ számpárok elégítik ki.

Összesen: 7 pont