1. Tegyük fel, hogy p és q pozitív egészek, továbbá $p > q$. Bizonyítsuk be, hogy az $1+\sqrt{2}$ a $\frac{p}{q}$ és a $\frac{p+q}{p-q}$ közé esik.

Megoldás. Legyen $\frac{p}{q} = r$. Ekkor $\frac{p+q}{p-q} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}-1} = \frac{r+1}{r-1}$, ahol r 1-nél nagyobb racionális szám. 2 pont

További átalakításokkal

$$r = (r-1)+1 \quad \text{és} \quad \frac{r+1}{r-1} = \frac{r-1+2}{r-1} = 1 + \frac{2}{r-1}.$$

Tehát elegendő belátni, hogy az $1+\sqrt{2}$ az $1+(r-1)$ és az $1+\frac{2}{r-1}$ közé esik. 2 pont

Ez pontosan akkor igaz, ha a $\sqrt{2}$ az $r-1$ és a $\frac{2}{r-1}$ közé esik. 1 pont

Ez pedig igaz, mert az $r-1$ és a $\frac{2}{r-1}$ pozitív számok mértani közepe pontosan $\sqrt{2}$, és két szám mértani közepe nyilván a két szám között van. Az is teljesül, hogy $r-1 \neq \frac{2}{r-1}$, mert $r-1$ racionális, $\sqrt{2}$ pedig irracionális. 2 pont

---

Összesen: 7 pont