4. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?

Megoldás: Tekintsük az i jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egészeket, melyeknek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2. Legyen a_i azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 1 vagy 9. Legyen b_i azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 3 vagy 7. Legyen c_i azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 5. $i = 1$ esetén $a_1 = 2$, $b_1 = 2$ és $c_1 = 1$. 1 pont

Rekurzió segítségével leírhatjuk sorozatainkat: $i+1$ jegyű 1-re vagy 9-re végződő számot csak egyféleképpen kaphatunk 3-ra vagy 7-re végződő számból, ezért $a_{i+1} = b_i$. Ugyanez igaz az 5-re végződőekre is, ezért $c_{i+1} = b_i$. 3-ra vagy 7-re végződő számot egyféleképpen kaphatunk 1-re vagy 9-re végződő számból, de kétféleképpen kaphatunk 5-re végződő számból (az 5-ös után írható 3 vagy 7), ezért $b_{i+1} = a_i + 2c_i$. 1 pont

Ebből $i = 2$-re $a_2 = 2$, $b_2 = 4$ és $c_2 = 2$ adódik. (Valóban, a megfelelő számok: 31,79; 13, 53, 57, 97; 35, 75.)

A rekurzió segítségével a sorozat további elemeit vizsgálva észrevehető, hogy

$$a_{2i} = c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} \quad \text{és} \quad b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1}$$ 2 pont

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Kezdő lépés: $i = 1$ esetén már kiszámoltuk a sorozatok megfelelő elemét és ezek valóban teljesítik az összefüggést.

Indukciós lépés: Feltesszük, hogy $a_{2i} = c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1}$ és $b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1}$, majd ennek segítségével bizonyítjuk az állítást $i + 1$-re. Az alábbi három sor mindegyikében az első két egyenlőségnél a rekurziós szabályt, a harmadiknál az indukciós hipotézist használjuk:

$$a_{2(i+1)} = b_{2i+1} = a_{2i} + 2c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} + 4 \cdot 3^{i-1} = 2 \cdot 3^i$$

$$b_{2(i+1)} = a_{2i+1} + 2c_{i+1} = b_{2i} + 2b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1} + 8 \cdot 3^{i-1} = 4 \cdot 3^i$$

$$c_{2(i+1)} = b_{2i+1} = a_{2i} + 2c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} + 4 \cdot 3^{i-1} = 2 \cdot 3^i$$ 2 pont

A feladatban feltett kérdésre a válasz a fentiek alapján $8 \cdot 3^{74}$, hiszen $a_{150} + b_{150} + c_{150} = 2 \cdot 3^{74} + 4 \cdot 3^{74} + 2 \cdot 3^{74} = 8 \cdot 3^{74}$. 1 pont

Összesen: 7 pont