2. feladat

Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?

Megoldás: Keressük N-et $N = 5^r 7^s v$ alakban, ahol $(v, 35) = 1$, és használjuk fel, hogy egy pozitív egész pontosan akkor k-adik hatvány, ha prímtényezős felbontásában minden prím kitevője a k-nak többszöröse. (1 pont)

Ekkor a feltétel szerint $N/5 = 5^{r-1}7^s v$ prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható 7-tel, $N/7 = 5^r 7^{s-1} v$ prímtényezős felbontásában pedig minden kitevő osztható 5-tel. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy $r = 7a + 1 = 5b$, $s = 5c + 1 = 7d$, és v felbontásában minden prím kitevője 5-tel és 7-tel is, vagyis 35-tel osztható, tehát v egy egész szám 35-ödik hatványa. (2 pont)

Így megfelel például $r = 15$, $s = 21$, $v = m^{35}$ (ahol m és 35 relatív prímek), azaz $N = 5^{15}7^{21}m^{35}$, tehát végtelen sok N létezik. (2 pont)

Megjegyzések: 1. A feladat megoldása akkor is teljes értékű, ha a versenyző megad végtelen sok N-et (például az $N = 5^{15}7^{21}m^{35}$ alakú számokat) annak részletezése nélkül, hogy ezeket hogyan találta meg, továbbá indokolja, hogy ezek valóban eleget tesznek a feladat követelményeinek.

2. Az is könnyen adódik, hogy az összes megoldás $N = 5^{15+35t}7^{21+35u}m^{35}$, ahol $(m, 35) = 1$, illetve egyszerűbb alakban $N = 5^{15}7^{21}M^{35}$, ahol M tetszőleges pozitív egész. Hasonlóan kezelhető a probléma, ha az 5 és 7 helyett két tetszőleges relatív prím szerepel. A relatív prímség feltétele nem hagyható el, például $N = 4x^{10} = 10y^4$ sohasem teljesül, mert a 2 kitevője a bal oldalon páros, a jobb oldalon viszont páratlan.