5. feladat

Legyenek $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 \ge 4n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

Első megoldás: Tekintsük az $f(x) = (x - a_1)(x - b_1) + \ldots + (x - a_n)(x - b_n)$ másodfokú polinomfüggvényt. (1 pont)

Ekkor a feltételek alapján $f(a_n)$ csupa nempozitív szorzat összege, tehát $f(a_n) \le 0$.
(2 pont)

Mivel $f(x)$ főegyütthatója pozitív, ezért az előzőek alapján van valós gyöke. (2 pont)

Ebből következik, hogy a diszkriminánsa nemnegatív, ami átrendezve éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja. (2 pont)

Második megoldás: Először belátjuk, hogy ha az a_i, b_j számok mindegyikéhez ugyanazt a d valós számot adva az $a'_i = a_i + d$ és $b'_j = b_j + d$ számokat képezzük, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség egyformán érvényes vagy nem érvényes az a_i, b_j számokra, illetve az a'_i, b'_j számokra. (2 pont)

Valóban, az $S = a_1 + \ldots + a_n + b_1 + \ldots + b_n$ és $T = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, illetve a hasonló S' és T' jelöléseket használva, és a feladatban szereplő $S^2 \ge 4nT$ egyenlőtlenséget föltéve

$$\begin{aligned} S'^2 &= (S + 2nd)^2 = S^2 + 4ndS + 4n^2d^2 \ge \\ &\ge 4nT + 4ndS + 4n^2d^2 = 4n(T + dS + nd^2) = \\ &= 4n\left(\left(a_1b_1 + d(a_1 + b_1) + d^2\right) + \ldots + \left(a_nb_n + d(a_n + b_n) + d^2\right)\right) = \\ &= 4nT', \end{aligned}$$

fordított szereposztással pedig a fordított irányú következtetés adódik. (3 pont)

Az a_i, b_j számok mindegyikéből ugyanazt az a_n és b_1 közötti számot levonva feltehetjük tehát, hogy az összes a_i nempozitív, és az összes b_j nemnegatív. Ilyenkor viszont a bizonyítandó egyenlőtlenség magától értetődik: a bal oldal nemnegatív, míg a jobb oldal nempozitív. (2 pont)