Orosz Gyula: Hibás megoldások (2025. tavasz)

Feladatok (4-7.)

4. feladat:
a) Számítsuk ki $x + y + z$ értékét, ha:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=-1\\ x-y+2z&=12\\ x+2y+3z&=13 \end{aligned}\right\}$$

b) Számítsuk ki $x^2 + y + z$ értékét, ha:

$$\left.\begin{aligned} 2x^2+3y-z&=1\\ -x^2+4y-5z&=-6\\ 3x^2+7y+2z&=17 \end{aligned}\right\}$$

5. feladat:
Szoldatics József minikurzusán hangzott el következő feladat.
„47. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $\left[\frac{1}{\{x\}}\right]=[x]$.

6. feladat (KöMaL próbaérettségi feladatsor alapján):
a) Egyenlő szárú háromszöget készítünk 56 db 1 cm hosszú pálcikából azok eltörése nélkül, majd az oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk, melyek területének összege 1056 cm^2. Igazoljuk, hogy a háromszög szárai 20 cm hosszúságúak.

b) Egyenlő szárú háromszöget készítünk 56 db 1 cm hosszú pálcikából azok eltörése nélkül, majd az oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Az alapra állított négyzet területének, valamint a szárakra állított négyzetek négyszeres területei összegének az értéke 3099 cm^2. Milyen hosszú a háromszög alapja?

7. feladat:
Adott háromszögbe szerkesszünk két azonos sugarú, maximális területösszegű kört.

(**Általánosítás:** Mekkora a körök sugara, ha 2 helyett n darab azonos sugarú érintőkört rajzolunk? (A körök érintik egymást és a háromszög AB oldalát, és a két szélső kör érinti az AC, ill. BC oldalakat is.)

„Megoldások” (4-7.)

4. „Megoldás”:
a) A három egyenletet összeadva $4x + 4y + 4z = 24$, innen $x + y + z = 6$.

b) Az első és harmadik egyenlet összegéből kivonjuk a másodikat: $6x^2 + 6y + 6z = 24$, innen $x^2 + y + z = 4$.

5. „Megoldás”: A nevező nem lehet nulla: $\{x\} \neq 0$. Az $[x] = n$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) helyettesítéssel
$\left[\frac{1}{\{x\}}\right] = n \Leftrightarrow n \leq \left[\frac{1}{\{x\}}\right] < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \{x\} \leq \frac{1}{n}$.
Mivel $\{x\} + [x] = x$, így $\frac{1}{n+1} + [x] < x \leq \frac{1}{n} + [x]$, azaz $\frac{1}{n+1} + n < x \leq \frac{1}{n} + n$.
Eredményül végtelen sok megoldást kaptunk.

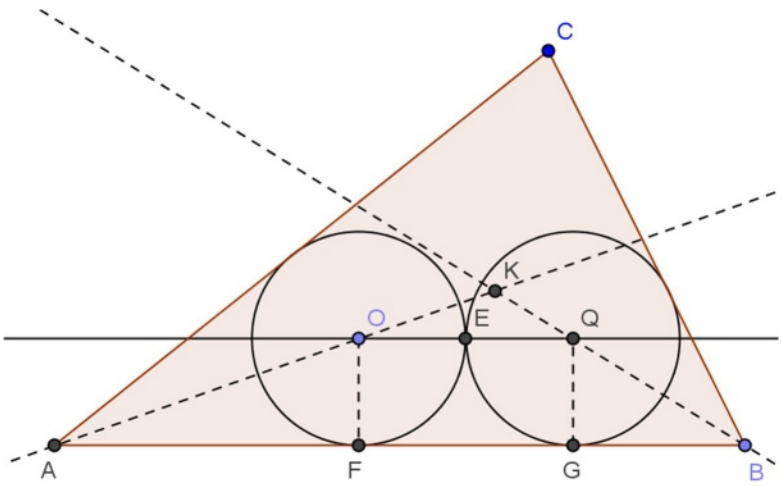
6. „Megoldás”:
Jelentse a háromszög alapjának hosszát a, a szárainak hosszát b (cm-ben mérve).

a) Ekkor felírható:
$$\left.\begin{aligned} a + 2b &= 56 \\ a^2 + 2b^2 &= 1056 \end{aligned}\right\}$$
Az első egyenletből $a = 56 - 2b$, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:
$(56-2b)^2 + 2b^2 = 1056 \Leftrightarrow 6b^2 - 224b + 2080 = 0 \Leftrightarrow 3b^2 - 112b + 1040 = 0$. Az egyenlet két gyöke $b_1 = 20$ és $b_2 = \frac{50}{3}$. A második gyök nem felel meg (a pálcákat nem törhetjük el), így a szárak hossza valóban 20 cm.

b) Ekkor felírható:
$$\left.\begin{aligned} a + 2b &= 56 \\ a^2 + 8b^2 &= 3099 \end{aligned}\right\}$$
Az első egyenletből $b = \frac{56-a}{2}$, ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:
$a^2 + 8\left(\frac{56-a}{2}\right)^2 = 3099 \Leftrightarrow 3a^2 - 224a + 3173 = 0$. Az egyenlet két gyöke $a_1 = 19$ és $a_2 = \frac{167}{3}$. A második gyök nem felel meg (a pálcákat nem törhetjük el), így az alap hossza 19 cm.

7. „Megoldás”:
Igazolható, hogy a maximális területösszegű köröknek egymást és a háromszög két-két oldalát érinteniük kell. (Ha valamelyik érintési feltétel hiányozna, akkor a körök sugara és így területe növelhető lenne.) Elegendő tehát ebben a helyzetben megkeresni a maximális sugarú érintő kört; a kérdés pedig az, hogy a háromszög melyik oldalát érintsék a körök.

Tegyük fel, hogy a háromszög $AB = c$ oldalához szerkesztjük meg a megfelelő O és Q középpontú, r sugarú köröket. A körök középpontjainak AB oldalra eső merőleges vetületeit jelölje F és G; ekkor $AF + FG + GB = c$ (ábra).



$AF = r \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $FG = 2r$, $GB = r \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, így $r \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2r + r \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = c$, azaz

$$r = \frac{c}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 + \mathrm{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Az $f(x) = \mathrm{ctg}(x)$ függvény a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, $\frac{1}{\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}$ nő.

Vagyis adott c esetén α és β növelésével a $\frac{c}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 + \mathrm{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}$ tört s így r is nő. α és β növelésekor γ csökken, ezért a sugár maximális helyzetében c lehetőleg minél kisebb kell, hogy legyen; azaz a beírt köröknek a legkisebb oldalt kell érinteniük.

Elemzések (4-7.)

4. Hibakeresés, elemzés:
a) A kérdezett összeg kiszámításához tehát nem szükséges külön-külön meghatározni x, y és z értékét. Azt viszont igazolni kellene (ellenőrzés), hogy az egyenletrendszernek egyáltalán van megoldása.

Ellenőrzés: Az első egyenletből $z = 2x + 3y + 1$, helyettesítéssel

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 5y + 2 = 12 \\ 7x + 11y + 3 = 13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 7x + 11y = 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 7x + 11(2 - x) = 10 \Leftrightarrow x = 3, y = -1, z = 4.$$

b) Ellenőrzésképpen most is kiszámíthatjuk az x^2, y, z értékeket. Az első egyenletből $z = 2x^2 + 3y - 1$, helyettesítéssel

$$\left.\begin{array}{l} -11x^2 - 11y + 5 = -6 \\ 7x^2 + 13y - 2 = 17 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + y = 1 \\ 7x^2 + 13y = 19 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2 = -1, y = 2, z = 3.$$

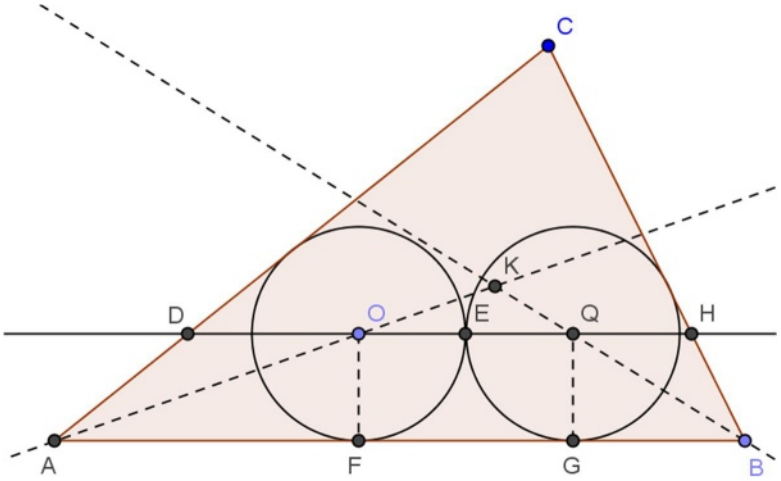
Egy szám négyzete nem lehet negatív, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

5. Hibakeresés, elemzés (Szoldatics József): A képlet n = 1-re $\frac{3}{2} < x \le 2$ alakú, de a kikötés miatt x nem lehet egész szám. Így n = 1-re $\frac{3}{2} < x < 2$, míg $n \ge 2$ esetén $\frac{1}{n+1} + n < x \le \frac{1}{n} + n$ a helyes megoldás.

6. Hibakeresés, elemzés:
Mindkét részfeladat hiányos, hiányzik a kötelező ellenőrzés, az egyenletrendszer nem ekvivalens a szöveggel. (Az $a, b \in \mathbf{Z}^+$ feltétellel kapunk ekvivalens modellt.)
a) $a = 56 - 2\cdot 20 = 16$ cm, ez az eredmény megfelelő.
b) $b = \frac{56-19}{2} = 18{,}5$ (cm), de ez nem egész szám, a feltételeknek nem felel meg. A feladatnak nincs megoldása.

7. Hibakeresés, elemzés: Mi a hiba oka?

Második megoldás:
Az O és Q középpontokon átmenő, az AB oldallal párhuzamos egyenes a háromszög oldalait metssze a D és H pontokban (ábra).



Ekkor $DOA\angle = OAF\angle = \frac{\alpha}{2}$, mert váltószögek, ezért ADO egyenlő szárú háromszög, és így $AD = DO$. Hasonlóan $BH = HQ$ is teljesül. A CDH háromszög kerülete $CD + DO = CD + DA = CA$ és $CH + HQ = CB$ miatt $b + a + 2r$.
CAB és CDH háromszögek hasonlók (szögeik megegyeznek), a hasonlóság arányát a kerületükkel és a C-ből húzott magasságokkal írhatjuk fel ($k = k(ABC)$): $\frac{k}{a+b+2r} = \frac{m_c}{m_c - r}$.
Innen $k(m_c - r) = m_c(a+b+2r) \Leftrightarrow cm_c - kr = 2m_c r \Leftrightarrow 2t = r(2s + 2m_c) \Leftrightarrow$
$r = \frac{t}{m_c + s}$. Adott háromszög esetén t és s állandó, így r akkor lesz a legnagyobb, ha a m_c a legkisebb, azaz ha a c oldal a legnagyobb.
A beírt köröknek a legnagyobb oldalt kell érinteniük.

Harmadik megoldás:

Az előző ábra jelöléseit használva most a *KOQ* és *KAB* háromszögek hasonlóságát használjuk ki. Ha a beírt kör sugara ρ, akkor a hasonlóság aránya $\frac{c}{2r} = \frac{\rho}{\rho - r} \Leftrightarrow r = \frac{c\rho}{2\rho + c} =$ $\rho - \frac{2\rho^2}{2\rho + c}$. Azt kaptuk, hogy a beírt köröknek a legnagyobb oldalt kell érinteniük (ekkor vonjuk le a legkisebb törtet az állandó ρ-ból).

(**Általánosítás:** Mekkora a körök sugara, ha 2 helyett *n* darab azonos sugarú érintőkört rajzolunk? (A körök érintik egymást és a háromszög *AB* oldalát, és a két szélső kör érinti az *AC*, ill. *BC* oldalakat is.)

Az általánosítás megoldása:

A második megoldás módszerével $\frac{k}{a + b + (2n-2)r} = \frac{m_c}{m_c - r}$. Innen

$k(m_c - r) = m_c(a + b + (2n-2)r) \Leftrightarrow cm_c - kr = m_c(2n-2)r \Leftrightarrow 2t = r(2s + m_c(2n-2))$

$\Leftrightarrow r = \frac{t}{s + (n-1)m_c}$.

A képlet visszaadja *n* = 1-re az $r = \frac{t}{s}$ területképletet, ill. *n* = 2-re az előző eredményt.