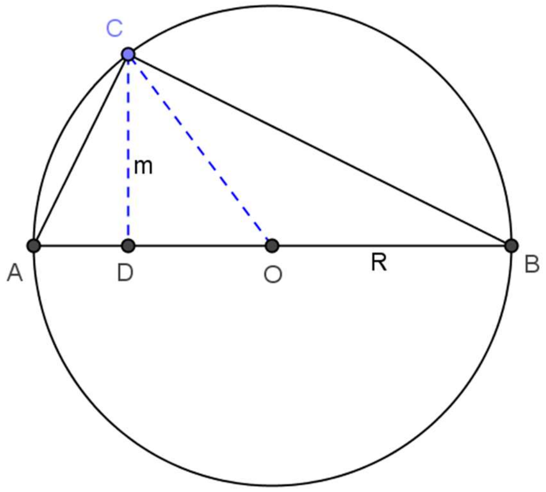
**1. feladat:**
Az $AB = 10$ cm átmérőjű kör kerületének egy $C$ pontjára teljesül, hogy $CA \cdot CB = 40$ cm$^2$. Számítsuk ki $AC$ hosszát!

**„Megoldás”:**
Thalész tétele miatt $ACB\angle = 90°$. Legyen az $ABC$ derékszögű háromszögben a hagyományos jelölésekkel $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$ (és $c = 2R$), a $C$-ből húzott magasság pedig $CD = m$ (ábra).




A háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $\frac{ab}{2} = \frac{cm}{2}$, innen $m = \frac{ab}{c} = 4$ (cm). Az $ODC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételéből (1) $OD^2 = R^2 - m^2 = 9$, ebből $OD = 3$ (cm).
$AD = R - OD = 2$ (cm), végül az $ADC$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételéből $CA = \sqrt{AD^2 + m^2} = \sqrt{20}$ cm.

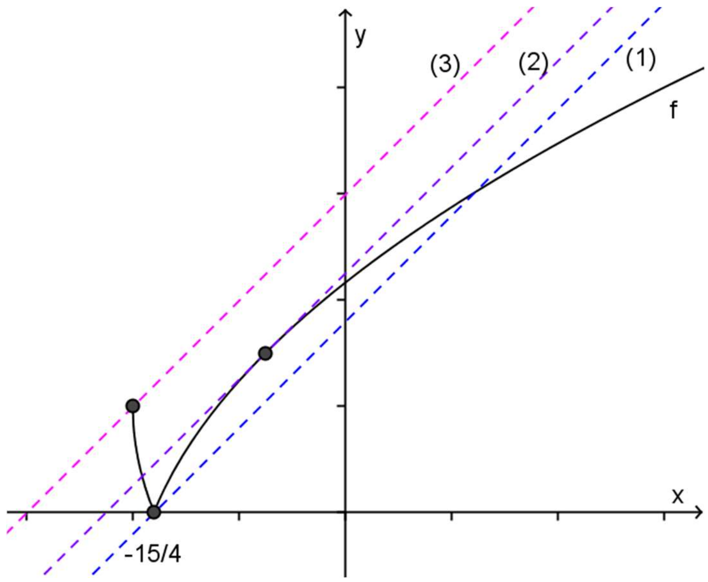
**Hibakeresés, elemzés:**
Ez a megoldás így még hiányos, az $A$ és $B$ pontok szimmetrikus szerepe miatt (az ábrán $A$ és $B$ felcserélhető) $CB = \sqrt{BD^2 + m^2} = \sqrt{80}$ is megoldást ad.
Az algebrai „figyelmeztetést” az (1) egyenletben kapjuk: ebből $OD = \pm 3$ cm adódik, s előjeles szakaszokkal számolva $AD = R \pm 3$ (cm).

**2. feladat (2024. december):**
Hogyan függ az alábbi egyenletben a gyökök száma a $p$ paramétertől?
$\left|-2\sqrt{x+10}+5\right| = x + p$.

**„Megoldás”:**
A tisztán algebrai megoldás elég nehéznek tűnik (az abszolútérték feloldása esetszétválasztással; kikötés mindkét oldalra (ami $p$-től függ), majd átrendezés után négyzetre emelés; a kapott gyökök is $p$-től függnek; végül ellenőrizni kell, hogy (a $p$-től függő) gyökök megfelelnek-e a kikötéseknek).
Jobb ötletnek tűnik a **grafikus segítség alkalmazása**: az egyenlet két oldalát mint függvényeket vázlatosan ábrázoljuk, s a görbék közös pontjainak száma adja meg a megoldásszámot.

A bal oldalon $f(x) = -2\sqrt{x+10}+5$ grafikonja a négyzetgyökfüggvény grafikonjából egy eltolással, majd egy tengelyes (merőleges) affinitással, végül egy újabb eltolással származtatható, erre kell „illeszteni” külső függvényként az abszolútérték-függvényt (ábra).

A jobb oldal képe párhuzamos egyenesek halmaza, az egyenesek meredeksége 1.




Kiszámítjuk az $f$ függvénygörbe $x$ tengelymetszetét:
$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2\sqrt{x+10}+5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{15}{4}$
Az $y = x + p$ egyenletű egyenesek közül a feladat szempontjából három olyan van, amely kitüntetett szerepű.
Az (1) egyenlete $y = x + \dfrac{15}{4}$, (3) egyenlete $y = x + 15$ (mert a négyzetgyök-görbe végpontja (–10; 5)-ben van). A (2)-höz tartozó $p$ értéket pedig akkor kapjuk meg, amikor az

$$\left.\begin{aligned} y &= -f(x) \\ y &= x + p \end{aligned}\right\}$$

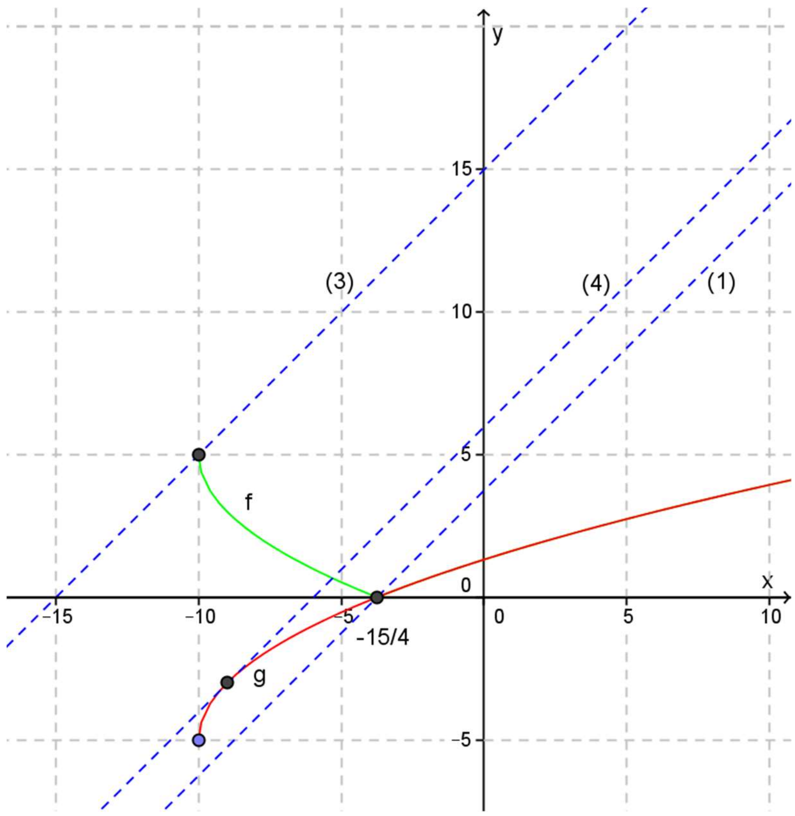
egyenletrendszernek pontosan 1 megoldása van.

A $2\sqrt{x+10}-5=x+p$ egyenletből $2\sqrt{x+10}=x+p+5$ $\Rightarrow$
$4(x+10)=x^2+p^2+25+2px+10x+10p$ $\Leftrightarrow$ $x^2+(2p+6)x+p^2+10p-15=0$. Az érintési feltétel szerint az egyenlet diszkriminánsa zérus: $(2p+6)^2-4(p^2+10p-15)=0$ $\Leftrightarrow$ $-16p+96=0$ $\Leftrightarrow$ $p=6$.

A grafikon alapján tehát az egyenlet gyökeinek száma:

| *p* értékei | $p<\frac{15}{4}$ | $p=\frac{15}{4}$ | $\frac{15}{4}<p<6$ | $p=6$ | $6<p\le 15$ | $15<p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a gyökök száma | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |

**Hibakeresés, elemzés:**
Ha méretarányosan ábrázoljuk az *f* és $g(x)=2\sqrt{x+10}-5$ függvényeket (ábra), akkor láthatjuk, hogy az 1 meredekségű egyenesek nem tudják 1-nél több pontban metszeni az *f* függvény görbéjét.




Ennek az az oka, hogy a négyzetgyök-görbe meredeksége az $x=-\frac{15}{4}$ helyen kisebb, mint 1.

(Indoklás: $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+10}}$, $g'\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{2}{5}<1$.)
Ezért a (4) $y=x+6$ egyenes is csak az $y<0$ félsíkban érinti *g*-t. (Az érintési pont (–9; –3).)
Eredmény: $p\le 15$ esetén 1 gyöke van az egyenletnek, egyébként 0.

**3. feladat (2024. december):**
**a)** Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első 5 tagjának összege 8, a tagok reciprokainak összege 1. Mennyi az első 5 tag szorzata?
**b)** Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha az első 5 tag összege 16! (A többi feltétel változatlan.)
**c)** Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha az első 5 tag összege 31, a reciprokok összege pedig $\frac{31}{16}$!

**„Megoldás”:**
**a)** Legyen a sorozat első tagja *a*, a hányados *q*, ekkor $a + aq + ... + aq^4 = 8$ és $\frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + ... + \frac{1}{aq^4} = 1$. A második egyenlet bal oldala $\frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + ... + \frac{1}{aq^4} =$ $\frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q^4}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{q^4 + q^3 + ... + 1}{q^4}\right) = \frac{a(q^4 + q^3 + ... + 1)}{a^2q^4}$ alakra hozható. Az első egyenletet felhasználva innen $\frac{8}{a^2q^4} = 1 \iff a^2q^4 = 8 \iff aq^2 = \sqrt{8}$ $(a, q > 0)$.
A sorozat harmadik tagja $\sqrt{8}$, a mértaniközép-tulajdonság miatt pedig az első öt tag szorzata $\sqrt{8}^5 \approx 181{,}02$. (Az első 5 tag szorzata $a \cdot aq \cdot ... \cdot aq^4 = a^5 \cdot q^{10} = (aq^2)^5$.) A tagokat nem tudtuk meghatározni, de a szorzatukat igen.

**Megjegyzés:** Az egyenletek hányadosa, azaz a jobb oldalak hányadosa éppen a harmadik tag négyzetét adja.

**b)** Ugyanígy számolva $aq^2 = 4$ adódik, az első öt tag szorzata $4^5 = 1024$.

**c)** Alkalmazhatjuk a tagok szimmetrikus felírását is. Ekkor a tagok és reciprokaik összegére felírhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{q^2} + \frac{b}{q} + b + bq + bq^2 &= 31 \\ \frac{q^2}{b} + \frac{q}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{bq^2} &= \frac{31}{16} \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} b\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 + q + q^2\right) &= 31 \\ \frac{1}{b}\left(q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right) &= \frac{31}{16} \end{aligned}\right\},$$

illetve a két egyenlet hányadosából $b^2 = 16$ (egyik tényező sem nulla).
Az öt tag szorzata ($b > 0$ miatt) $b^5 = 1024$.

**Hibakeresés, elemzés:**

**a)** Egy pozitív szám és reciprokának az összege legalább 2, így $a + \frac{1}{a} + aq + \frac{1}{aq} + ... + aq^4 + \frac{1}{aq^4} \ge 5 \cdot 2$ kellene, hogy teljesüljön. De a megadott számokkal az összeg csak 9.
Ilyen mértani sorozat tehát nem létezik.

**b)** Most teljesül a reciprok-egyenlőtlenség, $a+\frac{1}{a}+aq+\frac{1}{aq}+\dots aq^4+\frac{1}{aq^4}=17\geq 10$.

Azonban az öt szám számtani közepe $\frac{a+aq+\dots+aq^4}{5}=\frac{16}{5}$, és ez kisebb, mint a számok harmonikus közepe: $\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{aq}+\dots+\frac{1}{aq^4}}=5$. Ez pedig nem lehetséges.

Ilyen mértani sorozat sem létezik.

**c)** Teljesül a reciprok-egyenlőtlenség, valamint a harmonikus és számtani közép közötti egyenlőtlenség is: $\frac{5}{\frac{31}{16}}<\frac{31}{5}$. Azonban valamilyen módon meg kellene győződnünk arról, hogy valóban létezik ez a mértani sorozat (ellenőrzés), azaz nincs további kizáró feltétel.

**Ellenőrzés:**

(Meghatározzuk a sorozat tagjait.) Az első egyenletből $b=4$ esetén $\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2=\frac{31}{4}$ adódik, a $c=q+\frac{1}{q}$ helyettesítéssel $c^2+c-\frac{35}{4}=0 \iff c=\frac{5}{2}$ vagy $c=-\frac{7}{2}$. A második gyök hamis ($c>0$ feltétel), az elsőből $q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \iff q=2$ vagy $q=\frac{1}{2}$.

A sorozat tagjai 1, 2, 4, 8, 16 (vagy 16, 8, 4, 2, 1), és az első öt tag szorzata valóban 1024.

**Megjegyzés:**

Az öt tag szorzatát kérdezték, elvileg tehát nem kellett volna meghatározni a tagokat. A sorozat létezésének bizonyításához azonban erre szükség volt.