

Minikurzus mintasor, 2024/25, Orosz Gyula (Hibás megoldások)

Feladatok:

1. a) Három vasúti kocsiban összesen 26 utas van. Tudjuk, hogy a harmadik kocsiban a másodikban lévők kétszeresénél 6-tal vannak kevesebben; valamint hogy ha az első kocsiból átszáll 5 ember a másodikba, akkor a második és harmadik kocsiban ugyanannyian lesznek. Hány utas van a második kocsiban?
Oldjuk meg az előző feladatot, ha kezdetben a három vasúti kocsiban összesen **b)** 30; **c)** 35 utas van! (A többi feltétel változatlan.)

2. Egy háromszög három oldala 3 cm, 4 cm és 5 cm. Számítsuk ki a háromszög területét!

3. Egy osztályban franciául 10-en, angolul 20-an, németül 25-en tanulnak. Franciául és angolul 5, angolul és németül 6, németül és franciául 8, végül mindhárom nyelven 2 diák tanul. Hányan tanulják a három nyelv valamelyikét?

4. Határozzuk meg x és y arányát, ha adott az alábbi egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x^2 - 6xy + 2y^2 = -3 \\ (2) \quad 2x^2 + 3xy - 7y^2 = -2 \end{array} \right\}$$

5. Határozzuk meg pozitív számokra a $K = x^2 + \frac{1}{x}$ kifejezés minimumát!

6. (egyetemi pótfelvételi, 1968) Egy n -szög belső szögei olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 120° , és különbsége 5° . Hány oldalú a sokszög?

7. (Arany Dániel verseny, 1980) Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma páratlan.

8. Mely valós számokra igaz, hogy $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{ctgx}$?

„Megoldások”:

1. a) Jelölje x a második kocsiban lévő utasok számát. Ekkor a harmadik kocsiban lévő személyek száma egyrészt $2x - 6$, másrészt $x + 5$. Innen $2x - 6 = x + 5 \Leftrightarrow x = 11$. A második kocsiban tehát 11 utas van. Ellenőrzés: $2 \cdot 11 - 6 = 16$ az egyenlet bal oldala, $11 + 5 = 16$ a jobb oldal értéke; a két oldal valóban egyenlő.

b) és **c)** Az **a)** feladathoz hasonlóan $x = 11$ adódik, az ellenőrzés is ugyanaz.

2. Pitagorasz tétele miatt a háromszög derékszögű (3, 4, 5 pitagorasz számhármassal), így a területe $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ (cm²).

3. Jelölje F, A, N rendre a francia, angol és német nyelven tanulók halmazát. A logikai szitaformulát alkalmazzuk, mely szerint

$$|F \cup A \cup N| = |F| + |A| + |N| - |F \cap A| - |F \cap N| - |A \cap N| + |F \cap A \cap N|.$$

A formula alapján $|F \cup A \cup N| = 10 + 20 + 25 - 5 - 8 - 6 + 2 = 38$; vagyis 38-an tanulják a három nyelvből valamelyikét.

4. $-2 \cdot (1) + 3 \cdot (2)$: ekkor $4x^2 + 21xy - 25y^2 = 0$. $y \neq 0$, így $\frac{4x^2}{y^2} + \frac{21x}{y} - 25 = 0$. Innen

következik, hogy $\frac{x}{y} = 1$ vagy $\frac{x}{y} = -\frac{25}{4}$.

5. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget felírva $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{x}$, azaz

$K \geq 2\sqrt{x}$. A minimum tehát $2\sqrt{x}$, és ez akkor áll elő, ha $x^2 = \frac{1}{x}$, azaz $x = 1$. Ekkor $K = 2$ a kifejezés minimuma.

6. Az n -szög szögei rendre $120^\circ, 125^\circ, 130^\circ, \dots, 120^\circ + (n-1) \cdot 5^\circ$. Ezek összege megegyezik a belső szögek összegével: $\frac{120^\circ + 115^\circ + n \cdot 5^\circ}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$. Innen $n^2 - 25n + 144 = 0 \Rightarrow n_1 = 9$ és $n_2 = 16$. A sokszög tehát 9 vagy 16 oldalú lehet.

7. Egy belső pontot a háromszög csúcaival összekötve három kisebb háromszöget kapunk. Minden újabb felvett belső pont valamelyik már meglévő háromszög belsejébe kerül, és 2-vel növeli a részháromszögek számát. A részháromszögek számának paritása tehát invariáns tulajdonság, azaz valóban mindig páratlan.

8. Az addíciós tételek közül a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ azonosságot alkalmazzuk, $\alpha = \beta = x$

helyettesítéssel; valamint felhasználjuk, hogy $\operatorname{ctgx} = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$. Ekkor $\frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$, azaz

$2\operatorname{tg}^2x = 1 - \operatorname{tg}^2x$. Innen $\operatorname{tg}^2x = \frac{1}{3}$, vagyis $\operatorname{tg}x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Eredmény: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ellenőrzés: Ha $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, akkor az egyenlet mindkét oldalának az értéke $\sqrt{3}$. Ha pedig

$x_2 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$, akkor mindkét oldal $-\sqrt{3}$.