

Szűkítő, bővítő azonosságok

K 1.1. Írjuk fel egyetlen gyökjellel: **e)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[8]{a^2}$; **f)** $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{b}}$.

K 1.2. Mennyi a pontos értéke a $\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ kifejezésnek?
(Számológépet ne használjunk!)

K 1.3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\lg x^2 + \lg(x + 4)^2 = 2 \lg 3$

b) $\log_2 x^2 + \log_4 x^2 = 9 \cdot \log_8 5$ [OFI próbaérettségi vizsga, 2015.]

K 1.6. Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt[3]{x - 10} - \sqrt[3]{4x} = 2$.

Egyenlet, egyenletrendszer, egyenlőtlenség

Á 10.5. Melyik az a pozitív egész szám, amelynek utolsó 6-os számjegyét az első helyre írva a szám 4-szeresét kapjuk?

Á 10.3. a) Három szomszédos páros szám szorzata 960. Mik lehetnek a számok?

b) Három egész szám szorzata 120, a számok $d = 7$ különbségű számtani sorozatot alkotnak. Mik lehetnek a számok?

K 2.2. Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet együtthatói c , a , b sorrendben számtani sorozatot alkotnak.

1. Az a és c együtthatók szorzata 2-vel kisebb, mint a b együttható.

2. A számtani sorozat differenciájánál 8-cal kisebb a c együttható 3-szorosa.

Mi lehet a c együttható értéke, ha tudjuk, hogy az egyenletnek két különböző valós gyöke van?

K 4.2. Határozzuk meg xy értékét, ha $x + y = 1$ és

a) $x^3 + y^3 = 12$, [KöMaL C.1508.]

b) $x^3 + y^3 = -2$.

Háromszögek

K 7.3. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha oldalaira teljesül, hogy:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad c^2 - 6a = 2 \\ (2) \quad 3a - 3c = -5 \\ (3) \quad 3a + 3b = 2c + 8 \end{array} \right\}$$

K 7.5. Szerkesszünk háromszöget, ha adott $a - b$, c és β !

K 7.6. Az ABC háromszögben $a = 5$, $c - b = 2$ és $\gamma = 2\beta$. Határozzuk meg a háromszög oldalait!

I/7. feladat: Adott háromszögbe szerkesszünk két azonos sugarú, maximális területösszegű kört.

Sokszögek

K 8.1. Az $ABCD$ egység oldalú négyzet oldalfelező pontjait összekötjük a szemközt eső oldalak végpontjaival. Az így kapott nyolc egyenes egy nyolcszöget határoz meg. Mekkora a nyolcszög területe? [egyetemi felvételi feladat, 1989.]

K 8.2. Egy téglalap kerülete 50 cm. A téglalap oldalaira kifelé négyzeteket szerkesztünk, a négy négyzet összterülete 314 cm^2 . Mennyi a téglalap területe?

K 8.3. Egy paralelogramma két oldala 5 cm és 2 cm hosszú, az átlók által bezárt hegyesszög 45° . Számítsuk ki a paralelogramma területét!

K 8.8. Egy érintőnégyyszög oldalai sorrendben 5, 7, 15 és 13 cm. Mekkora a négyszög területe, ha a beírt körének sugara
a) 4,5 cm, b) 1 cm?

Függvények, szélsőérték, értékkészlet

Á 2.9. Mennyi a $K = a^2 + \frac{9}{a^2}$ kifejezés értéke, ha $a + \frac{3}{a} - 3 = 0$?

K 16.2. Határozzuk meg az alábbi egyenlet valós megoldásait!

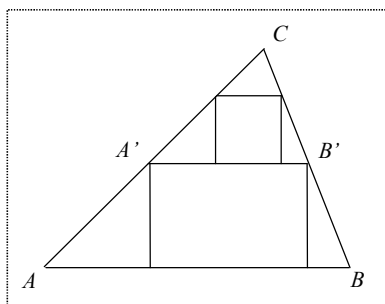
$$\sqrt{2x+6} = \frac{x^2-6}{2}$$

K 15.2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $(x-3)^x = 1$ b) $(x-1)^x = 8$ c) $x^{x-3} = 1$ d)

$x^{x-3} = 2^{x-3}$ e) $(x+3)^x = 2^{\frac{1}{x}}$

K 15.6. Négy falu áll egy 10 km oldalú négyzet négy sarkában. A lakosság olyan útrendszert szeretne építeni, amelyben bármelyik faluból bármelyik faluba el lehet jutni. A rendelkezésükre álló pénzük 27,5 km hosszú út megépítéséhez elegendő. Elég-e ez a kívánt útrendszer megépítéséhez?



K 15.7. [próbaérettségi feladat, emelt szint, KöMaL]

A T területű ABC hegyesszögű háromszögbe írjunk két téglalapot az ábra szerint!

a) Igazoljuk, hogy az AB oldalra írt téglalap területe legfeljebb fele lehet az ABC háromszög területének! (Ekkor a téglalap magassága feleakkora, mint az ABC háromszög AB oldalhoz tartozó magassága.)

b) Legfeljebb hányad részét tölti ki a két berajzolt téglalap a háromszög területének?

Számelmélet

K 5.4. a) Egy nézőtér egyik blokkja az előzetes tervek szerint éppen 365 néző befogadására alkalmas. A játéktér felől a lelátó szélesedik, minden rákövetkező sorban eggyel több néző fér el, mint az előtte lévőben. Hány sorból állhat a nézőtér (hány lehetőség van), ha egyelőre más feltételt nem veszünk figyelembe?

b) Oldjuk meg a feladatot 730 nézővel is! (A többi feltétel változatlan.)

Á 21.5. Szabályos 100-szög csúcsaiba felírtuk 1-től 100-ig valamilyen sorrendben a számokat. Vajon lehet találni három olyan szomszédos csúcsot, ahol az ott lévő számok összege legalább 152?

K 5.8. Az a, b, c, d pozitív egész számokra

(1) $ab + cd = 46$,

(2) $ac + bd = 31$ és

(3) $ad + bc = 43$.

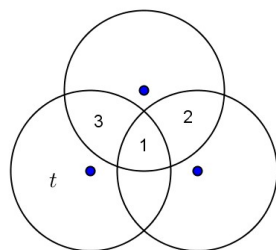
Mennyi lehet $a + b + c + d$ értéke?

Kombinatorika

Á 7.5. a) Egy osztály $\frac{4}{5}$ része angolul, $\frac{3}{5}$ része németül tanul, és legalább az egyik nyelvet mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztálylétszám 30 fő?

b) Egy kiránduláson a résztvevők $\frac{4}{5}$ része barna hajú volt, és $\frac{3}{5}$ része fiú. Hányan voltak a barna hajú fiúk, ha a kirándulásra 30-an mentek el?

Á 8.2. Orsolya a képen látható diagram mind a 7 részébe számokat ír. Minden részbe olyan számot kell beírni, amelyik a szomszédos részekben található számok összegével egyenlő. (Két rész akkor szomszédos, ha közös határvonaluk van.) Orsolya már beírt három számot. Milyen szám kerül az ábra t tartományába?



Á 8.3. Három iskolai kirándulásra összesen 117 gyerek ment el. Az első kirándulásra 60-an, a második kirándulásra 58-an, a harmadikon 61-en voltak. Csak az első kirándulásra 22, csak a második kirándulásra 25, csak a harmadik kirándulásra 26 gyerek résztvevő volt. Tudjuk még, hogy háromszor annyian vettek részt mindhárom kirándulásra, mint ahányan csak a másodikra és harmadikra mentek el (tehát az elsőre nem). Hányan mentek el mindhárom kirándulásra?

Á 6.6. Hat város között telefonvonalakat építenek ki úgy, hogy mindegyiket mindegyikkel közvetlenül összekötik. Öt ütemben

tervezik a munkálatokat úgy, hogy mindegyik ütemben három brigád párhuzamosan dolgozva 2-2-2 város között építi ki az összeköttetést. A munkálatok megkezdése előtt az egyik mérnök azt állítja, hogy a második építési ütem után – amikor tehát minden városból két telefonvonal indul ki – már bármelyik városból bármelyikbe lehet telefonálni, legfeljebb nem közvetlenül, hanem valamelyik másik város közbeiktatásával. Igaza van a mérnöknek?

Á 8.4. Hét teherautóval – melyek teherbírása egyenként 3 tonna – 50 darab követ szeretnénk elszállítani. A kövek rendre 370, 372, ..., 468 kg súlyúak. El lehet-e egy fordulóval szállítani a köveket?

Á 8.5. Az előző feladat egy bonyolultabb változata a következő: Nyolc teherautóval 50 darab kötömböt szeretnénk elszállítani. A kövek tömege rendre 145 kg, 146 kg, ..., 194 kg, egy teherautó teherbírása 1060 kg. Felpakolhatjuk-e úgy a köveket a nyolc teherautóra, hogy egy fordulóval el tudjuk szállítani őket?

Logika

K 25.3. Egy országban kétfajta ember él: tisztafejűek és zavarosfejűek. A tisztafejűek mindig helyesen érzékelik a dolgokat, és igazat is mondanak, míg a zavarosfejűek minden dolognak az ellenkezőjét érzékelik, viszont mindig hazudnak. Ha tehát egy tisztafejűtől megkérdezzük, hogy zöld-e a fű, azt feleli, hogy igen; és könnyen látható, hogy ha ezt egy zavarosfejűtől kérdezzük meg, ő is igennel válaszol.

Igaz-e, hogy minden eldöntendő kérdésre ugyanazt fogják válaszolni a tisztafejűek, mint a zavarosfejűek? (Ekkor ebben az országban eldöntendő kérdésekkel nem lehet megkülönböztetni, hogy ki milyen.)

Geometria

Á 11.4. [8. osztályos felvételi feladat] Az ABC háromszögben $AC = BC$. BC -re kifelé megrajzoljuk a $BCDE$ négyzetet. Határozzuk meg a BAD szöget a háromszög szögeinek segítségével!

Á 13.5. Az $ABCD$ négyszögben az A és a B csúcsoknál fekvő szögek derékszögek, $AD = 15$ egység, $BC = 24$ egység. A CD oldal felező merőlegese az AB oldal egyenesét az E pontban metszi, $AE = 20$ egység. Számítsuk ki az AB oldal hosszát!

Á 25.4. Az egységnyi négyzetélű (8x8-as) sakktáblára egységnyi átmérőjű korongokat helyezünk el úgy, hogy a korongok egymást nem fedhetik és a tábláról sem lóghatnak le. Legfeljebb hány korongot helyezhetünk el?

Á 16.3. Az ABC háromszög C csúcsán át húzott e egyenesre A -ból és B -ből merőlegeseket bocsátunk, ezek talppontjai rendre D és E . Az e egyenes mely helyzetében lesz az $AD + BE$ összeg maximális?

Á 16.4. [KöMaL Gy.2938.] Az $ABCD$ négyszögben $AB = CD$, $ABC\angle = 90^\circ$ és $BCD\angle = 100^\circ$. Az AD és BC oldalak felezőmerőlegeseinek metszéspontja M . Számítsuk ki a BMC szöget!

Paraméteres feladatok

Á 2.1. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $|x - 2| = 5$

b) $|x - 2| = b$ (b valós paraméter)

Mj: Keressük meg az $|x - 2| = y$ egyenletet kielégítő pontokat a koordináta-rendszerben.

K 3.8. Egy-egy $2a$ és $2b$ liter térfogatú edény félig van vízzel. Az elsőbe percenként $\frac{b}{a}$ liter, a másodikba percenként $\frac{a}{b}$ liter víz folyik be. Hány perc múlva lesz a két edényben ugyanannyi víz?

I/2. feladat: Hogyan függ az alábbi egyenletben a gyökök száma a p paramétertől? $|-2\sqrt{x+10} + 5| = x + p$.

K 2.5. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ha a p paraméter valós szám:

a) $\frac{2p+x}{2p-x} = \frac{8p^2-3x}{x^2-4p^2} - \frac{x+p}{2p+x}$

b) $\frac{x+p-2p^2}{p^2-x^2} = \frac{x+p}{p-x} + \frac{x}{p+x}$

K 9.2. Egy O csúcsú szögtartományba írt R sugarú K kör érinti a két szögszárát. A K kör O -hoz közelebbi oldalívéhez egy újabb k érintőkört szerkesztünk úgy, hogy ez a két szögszárát és K -t is érinti. A két kör egyik szögszáron lévő érintési pontjait jelölje E és F , távolságuk $EF = d$. Számítsuk ki a k kör sugarát! (Adatok: $R = 5$ cm, $d = 12$ cm.)

Statisztika

Á 22.2. Összehasonlították az A és a B osztályok matematika dolgozatának eredményeit. (Minden tanuló 1-től 5-ig egész osztályzatot kapott.) A 26 fős A osztályban az átlag 4,2, a 24 fős B osztályban az átlag 3,7 lett. Mennyi a két osztály együttes átlaga?

Á 24.2. Egy csoport tagjainak cm-ben mért magasságai: Anna: 155, Béla: 157, Csaba: 158, Dénes: 159. Kinek a magassága van legközelebb az átlagmagassághoz?

Á 22.3. [Érettségi feladat alapján, középszint, I. rész, 2010.] Egy oszlopdiagramon százásokra kerekítve ábrázolták az egyes évekre jutó házasságkötések számát. A diagram szerint 1995-ben 53 500, míg 1998-ban 44 900 házasságkötés történt. Hány házasságkötéssel volt kevesebb 1998-ban, mint 1995-ben? A választ százásokra kerekítve adjuk meg!

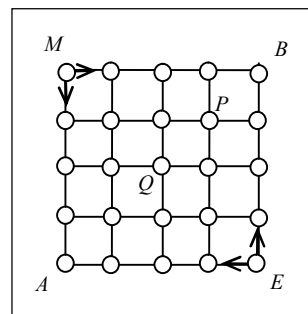
Á 22.5. [Középszintű próbaérettségi feladat, 2005.] 50 résztvevős szociológiai felmérés egyik kérdésére csak 48-an válaszoltak, 1-től 5-ig terjedő egész számmal. Az adatsokaság (egyetlen) módusza 4, mediánja 3,5, átlaga kerek 4 egész volt. Hogyan változott meg a három statisztikai mutató, ha az utólagosan bekért két adat 4 és 5 volt?

Valószínűségszámítás

2021. május Esz 5. c) Tudjuk, hogy az A , B , C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz?

Á 23.1. [felsőfokú kritériumdolgozat] A fagyaltok éjszakáján egy közvéleménykutatásban vizsgált csoport 82%-ának ízlett az eperfagyalt, 94%-nak pedig a citromfagyalt. A két gyümölcsfagyalt közül mindenkinek ízlett legalább az egyik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személynek mindkét gyümölcsfagyalt ízlett?

I/9. Feladat: [Érettségi vizsga, emelt szint, 2015. május] Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül?



Á 23.6. [Emelt szintű próbaérettségi feladat 2005.] Egy 5x5-ös négyzetrács alakú labirintus két átellenes csúcsában, a kijáratoknál egy egér és egy macska van. Mindketten adott jelre, ugyanakkora sebességgel elindulnak a szemközti kijárat felé úgy, hogy minden lépésben közelednek céljukhoz. Egymást nem látják, útválasztásuk az elágazásokban

véletlenszerű. (Amikor elágazáshoz érnek, a lehetséges két irány közül egyforma valószínűséggel választanak.)

a) Hányféle úton juthat el az egér a P , a macska a Q pontba?

b) Ha nem lenne a macska, akkor hányféle úton juthatna el az egér a szemközti kijáratához?

c) Hányféle úton találkozhat az egér és a macska? Mekkora valószínűséggel találkoznak?

Lazítás 1.

Á 1.1. Egy öltöny alapárát a nyári kereslet miatt 10%-kal felemelték. Ősszel az új árat először 10%-kal csökkentették, majd ismételt áreszállítás során az aktuális árat újabb 15%-kal csökkentették. Hány százaléka a végső ár az eredeti alapárnak?

Á 1.2. Elolvastam egy könyv harmadrészét, majd a maradék negyed részét, így 32 oldal maradt. Hány oldalas a könyv?

Á 2.3. Oldjuk meg az $n(n + 4) = 45$ egyenletet!

Á 2.8. a) Vigyük a gyökjel alá, ill. a gyökjel elé a szorzótényezőket!

1. $a\sqrt{b}$, 2. $t^3\sqrt{\frac{r}{t^5}}$. 3. $\sqrt{\frac{16a^4x^2}{9z^5d^2}}$, 4. $\sqrt{ab^2c^3d^4}$.

c) Írjuk fel egyetlen gyökjel segítségével az alábbi kifejezéseket!

5. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}$, 6. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^2}$.

Á 27.3. Van-e a **hiba** a következő levezetésben?

$$\sqrt{12x^2} \cdot \sqrt{3x} = \sqrt{12x^2} \cdot \sqrt{3x^2} = \sqrt{36x^4} = 6x^2.$$

Á 2.6. Van-e a racionális számpárok halmazán megoldása a $(2\sqrt{5} - 3)x - (3\sqrt{5} + 4)y = 8\sqrt{5} + 5$ egyenletnek?

Á 2.7. Mennyi a $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ kifejezés pontos értéke? (Számológépet ne használjunk!)

Kis algebrai paradoxonok

Á 24.3. Egy iskolai bűvészműtatvány a következő. Kezdetben Anna és Pisti számológépének a kijelzőjén egyaránt a 0,333333333 szám olvasható. Ezután mindketten 3-mal megszorozzák a számot. Ahogy várható, Anna gépe 0,999999999-et ír ki, de Pistié viszont 1-et. Hát ez hogy lehetséges?

Á 1.8. Egy folyami hajó az A kikötőből B -ig tartó utat $v = 6$ km/h, a B -ből A -ba tartó utat pedig $w = 10$ km/h átlagos sebességgel teszi meg. Mennyi a hajó teljes (oda-vissza) útra vonatkoztatott átlagsebessége?

Á 1.9. Valaki öt órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 kilométert tett meg óránként. Mekkora utat járt be?

K 19.2. Egy kerékpáros Budáról Hatvanba tartott. Lehetséges-e, hogy a 70 km hosszú útjának bármely egyórányi útszakaszán ugyanakkora volt az u átlagsebessége, de a teljes útra számított átlagsebessége ennél nagyobb volt?

Kerekítés

Á 24.5. Egy háromszög alakú terem alapja 18,4 m, magassága 7,9 m. A terem parkettázásakor 10% veszteséggel számol a kivitelező. Hány négyzetméter parkettát rendeljen? (A parketta csak egész négyzetméteres csomagolásban kapható.)

K 6.11. Pisti a következő tesztfeladattal találkozott:

A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(2; 1)$ és $B(6; 2)$ pont. Tükrözzük B -t az x tengelyre, így kapjuk a B' pontot; majd tükrözzük A -t az OB' egyenesre, így kapjuk az A' pontot.

Az AOA' szög

A: hegyesszög **B:** derékszög **C:** tompaszög.

Melyik a helyes válasz?

(A teszt kitöltésekor függvénytáblázatot lehet használni, de számológépet nem.)

K 21.5. Adjunk meg egy olyan intervallumot, amelyben a $\sin(x + 1) > 0,3$ egyenlőtlenség teljesül!
(Számoljunk két tizedesjegy pontossággal.)

K 21.6. Egy háromszög három csúcsa $A(-10; -5)$, $B(1; 8)$ és $C(9; 1)$. Határozzuk meg a háromszög területét először 2, majd 3 tizedesjegy pontossággal! Vajon melyik eredmény a pontosabb?

Nehezebb feladatok 1.

Á 15.2. Egy téglatest egy csúcsból kiinduló lapátlóinak hossza

a) 3 cm, 4 cm és 8 cm;

b) 18 dm, 28 dm és 38 dm.

Milyen hosszú a téglatest testátlója? [Tankönyvi feladat 1935.]

K 14.5. a) Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első 5 tagjának összege 8, a tagok reciprokeinak összege 1. Mennyi az első 5 tag szorzata?

b) Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha az első 5 tag összege 16! (A többi feltétel változatlan.)

c) I. Módosítás: az első 5 tag összege 31, a reciprokok összege pedig $\frac{31}{16}$.

Á 16.5. (Felvételi feladat 1995.) Egy konvex négyszög szemközti oldalainak felezőpontját összekötve négy négyszögre bontható. Ha ezek közül háromnak a területe 8, 16 és 20 területegység, akkor mekkora a negyedik résznégyszög területe?

Sorozatok

Á 17.3. a) Egy stadion **B** lelátójának a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a játéktértől távolodva hosszabbodnak. A leghátsó sorban 237 szék van, és minden megelőző sorban 3-mal kevesebb, mint a mögötte lévőben. A precíz szervezők pontosan megszámolták, a **B** lelátón 9480 néző fér el. Hány széksor található ezen a területen?

b) Módosítás: a lelátón 9435 néző fér el. (A 237 darab szék és a 3-as csökkenés továbbra is érvényes feltétel.)

Á 17.4. András, Béla és Csaba kertszomszédok, és mindhárman tartanak nyulakat. Hármójuknak összesen 39 nyula van, és ezek száma A , B , C sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Egy alkalommal a fiúk elmentek nyulaikkal a piacra, hogy árulják őket. András 4, Béla 1 nyulat adott el, Csaba egyet sem, viszont vásárolt 8 új nyulat. Hazafelé megállapították, hogy most nyulaik száma A , B , C sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Hány nyula volt eredetileg Andrásnak?

Á 18.4. [egyetemi felvételi feladat alapján] A 17, 18, ... szomszédos egész számok sorozatából kivettünk egy tagot. A maradék számok átlaga 52,4 lett. Hány tagú volt eredetileg a sorozat?

Á 19.3. a) Egy mértani sorozat első tagja 1, az ötödik tag négyzete 256. Mennyi lehet a sorozat első öt tagjának az összege?

b) Egy egész számokból álló mértani sorozat harmadik tagja 3-mal nagyobb az első tagnál. Mennyi lehet a negyedik tag?

Á 19.5. Egy mértani sorozat első tagja 3, n -edik tagja 13. Az első n tag reciprok értékeinek az összege 8. Számítsuk ki a mértani sorozat első n tagjának az összegét!

Körök

I/1. feladat: Az $AB = 10$ cm átmérőjű kör területének egy C pontjára teljesül, hogy $CA \cdot CB = 40$ cm². Számítsuk ki AC hosszát!

K 9.3. a) Az O középpontú kör belsejében lévő P ponton át meghúzzuk az AB és CD húrokat. $AP = 6$ cm, $BP = 14$ cm, $CP = 7$ cm. Számítsuk ki a DP szakasz hosszát! Mekkora a kör sugara, ha $PO = 2$ cm?

b) Az O középpontú körön kívüli P pontból meghúzzuk a PAB és PCD szelőket. $PA = 2$ cm, $AB = 7$ cm, $PC = 3$ cm. Számítsuk ki a CD szakasz hosszát! Mekkora a kör sugara, ha $PO = 5$ cm?

K 9.4. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 5$ egység. Számítsuk ki a négyszög köré írt kör sugarának a hosszát, ha **a)** $\angle ABC = 100^\circ$; **b)** $\angle ABC = 80^\circ$; **c)** $\angle BAC = 30^\circ$!

K 9.6. Egy háromszög területe 5 cm², kerülete 10 cm. Mekkora a beírt körének a sugara?

K 9.7. Számítsuk ki az $R = 1$ cm sugarú körbe írt háromszög területét, ha tudjuk, hogy:

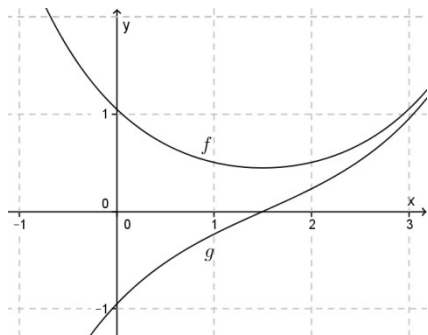
a) a háromszög oldalainak szorzata 5,2 cm³;

b) $ab = 2,8$ cm² és $c = 1,9$ cm;

c) cm-ben számolva $a + 1 = \frac{b + 2,8}{b}$ és $c = 1,9$ cm.

Differenciálszámítás, integrálszámítás, terület

K 18.2. Az ábrán látható f és g függvénygörbék egy h függvény, valamint h' deriváltjának a grafikonjai. Melyik lehet a h függvény, f vagy g ?



K 18.4. A következő levezetésekben egy integrál kiszámításakor különböző eredményeket kaptunk. Mi lehet ennek az oka?

a) Számítsuk ki $\int (2x + 3)^2 dx$ értékét!

I. megoldás (az összetett függvény deriválási szabályával):

$$\int (2x + 3)^2 dx = \frac{(2x + 3)^3}{3 \cdot 2}, \text{ kifejtve } \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x + \frac{9}{2}.$$

II. megoldás (tagonként integrálva):

$$\int (2x + 3)^2 dx = \int (4x^2 + 12x + 9) dx = \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 9x.$$

b) Számítsuk ki $\int \sin(2x) dx$ értékét!

I. megoldás (az összetett függvény deriválási szabályával):

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{\cos(2x)}{2}.$$

II. megoldás (addíciós-tétellel): $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ennek integrálja pedig $\int f'(x) \cdot f(x)$ típusú: $\int \sin(2x) dx = \int 2 \sin x \cos x dx = \sin^2 x$.

K 18.3. Számítsuk ki a következő határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{5x^2}$$

K 26.9. Ha az integrálási intervallum nem véges, vagy ha az integrálandó függvény nem korlátos, akkor improprius integrált

alkalmazhatunk. Tekintsük például az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvényt a $[-2; 2]$

intervallumon, és legyen $f(0) = 1$. Számítsuk ki a $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$ integrált!

$$\text{Megoldás: } \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{-2} \right) = -1. \text{ (Az nem jelent}$$

problémát, hogy $x = 0$ -ban $f(0) = 1$ választással értelmeztük a függvényt, hiszen a függvényértéket véges sok helyen megváltoztatva az integrál értéke (azaz a terület) nem változik.) Azonban az adott intervallumon a függvényértékek pozitívak, így a terület nem lehet negatív. Mi lehet a **hiba**?

Elégségesség hiánya

Á 11.5. Egy háromszög a, b, c oldalaira teljesül az $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{ab}$,
 $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{13}{bc}$, $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} = \frac{10}{ac}$ egyenletrendszer. Mekkora a háromszög leghosszabb oldala?

K 6.12. Egy háromszög $A(2; u)$, $B(4; v)$ és $C(w; 9)$ csúcsai rácspontok. A csúcsok koordinátáit egymás mellé írva olyan számot kapunk, amelyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel. Határozzuk meg a hiányzó koordinátákat úgy, hogy a háromszög súlypontja is rácspont legyen!

K 7.2. Egy derékszögű háromszög két befogójának a különbsége 21 cm, és az átfogó 3 cm-rel nagyobb az egyik befogónál. Számítsuk ki a háromszög átfogójának a hosszát!

K 11.1. Hét kincskereső 55 darab aranypénzből álló kincset talált. Az érmék tömege rendre 306 g, 307 g, ..., 360 g. El tudják-e úgy osztani a pénzt, hogy mindenkinek legalább 2,5 kg arany jusson?

Á 5.6. A $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaznak legfeljebb hány részhalmazát lehet megadni úgy, hogy közülük bármely kettőnek legyen közös eleme?

Á 6.7. [KöMaL Gy.2784.] Egy légitársaság ingajáratokat közlekedtet néhány város között úgy, hogy egy városból nem lehet háromnál több másikba közvetlenül eljutni. Legfeljebb egy átszállással viszont már eljuthatunk bárhonnan bárhova. Legfeljebb hány város között járhatnak a gépek?

Térgeometria

K 10.2. Sík terepen az A és B pontok közötti távolság kiszámításához a következő adatokat ismerjük: Az A ponttól 100 méterre álló gyárkémény az A pontból 45° -os, a B pontból 30° -os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kémény aljával összekötő egyenes 60° -os szöget zár be az AB egyenessel. Mekkora az AB távolság?

K 10.3. Számítsuk ki az α sík A és B pontjainak a tér egy P pontjától való távolságát, ha PA 4 cm-rel hosszabb PB -nél, és $TA = 15$ cm, $TB = 13$ cm (T a P merőleges vetülete az α síkon).

K 10.5. Egy 19 mm átmérőjű papírhengerre 10 m hosszú fólia van feltekerve, így egy 21 mm átmérőjű tekercset kapunk. Határozzuk meg a fólia vastagságát ezredmilliméter pontossággal!

K 10.8. (analógia)

a) Az ABC szabályos háromszög A csúcsát B -re, B csúcsát C -re, C csúcsát A -ra tükrözzük, így az $A'B'C'$ háromszöget kapjuk. Mennyi az $A'B'C'$ és ABC háromszögek területének aránya?

b) [KöMaL Gy.2517.] Az $ABCD$ szabályos tetraéder A csúcsát B -re, B csúcsát C -re, C csúcsát D -re, D csúcsát A -ra tükrözzük, így az $A'B'C'D'$ tetraédert kapjuk. Mennyi az az $A'B'C'D'$ és $ABCD$ tetraéderek térfogatának aránya?

Lazítás 2.

Á 19.1. Egy mértani sorozat első tagja 15, első négy tagjának összege 60. Számítsa ki a sorozat hányadosát!

Á 27.6. Mi a **hiba** az alábbi okoskodásban?

Két egymást metsző O ill. Q középpontú kör egyik közös pontjából megrajzoljuk az AOB és AQC átmérőket. A BC szelő a köröket D és E pontokban metszi. $ADB\angle = 90^\circ$ Thalész tétele miatt, és $AEC\angle = 90^\circ$ szintén teljesül. Így az ADE háromszögben két derékszög is van. Hát ez hogy lehetséges?

Á 11.6. Ha egy sokszög belső szögeit egy kivételével összeadjuk, eredményül 2570° -ot kapunk. Hány fokos lehet a kimaradt szög?

Á 12.7. a) Egy háromszög két oldala $a = 10$ cm, $b = 15$ cm. Tudjuk, hogy az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságok összege egyenlő a harmadik magassággal. Számítsuk ki a háromszög harmadik oldalát!

b) Ugyanez a feladat, ha $a = 7$ cm, $b = 3$ cm.

Á 12.3. Az ABC háromszög oldalaira teljesül, hogy $a + 3b = 2c$ és $2a + c = 3b$. Az $A'B'C'$ háromszögben hasonlóan $a' + 3b' = 2c'$ és $2a' + c' = 3b'$. Igaz-e, hogy a két háromszög hasonló?

Á 27.4. Pisti 7 pontú, egyszerű gráfokat rajzolt a füzetébe, majd megadta az egyes csúcsok fokszámait. A tanár megnézte a fokszámokat, majd – anélkül, hogy magukat a gráfokat megtekintette volna – azt állította, hogy a leírt adatok között több hibás is van. Hogyan okoskodhatott, és mely felírások hibásak biztosan?

a) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; **b)** 6, 5, 3, 2, 2, 2, 0; **c)** 6, 6, 4, 3, 2, 2, 1; **d)** 6, 6, 4, 2, 2, 2, 2; **e)** 6, 5, 3, 2, 2, 2, 2.

Nehezebb feladatok 2.

I/5. Szoldatics József idei minikurzusán hangzott el következő feladat.

„47. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left[\frac{1}{\{x\}} \right] = [x].$$

I/10. Az ABC hegyesszögű háromszögben $a < b < c$. A háromszög oldalaira befelé egy-egy négyzetet állítunk úgy, hogy a négyzet két csúcsa az oldalon, a harmadik és negyedik csúcsa pedig a másik két oldalon van. Melyik négyzet területe lesz a legnagyobb a három közül?

K 26.14. [Arany Dániel verseny, haladók, 2024. alapján] Öt személy megajándékozta egymást oly módon, hogy mindegyikük nevét felírják egy cédulára, a neveket egy dobozba teszik, majd sorban kihúznak egy-egy nevet. Ha valaki a saját nevét húzza, akkor a sorsolást megismétlik. Végül mind az öten kihúznak egy nevet, és senki nem a sajátját. Ekkor először az egyikük odaadja az ajándékát annak, akit húzott, ezután az, aki kapta, szintén odaadja az ajándékát annak, akit húzott, és így tovább. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ajándékozást kezdő diák ötödik-ként kapja meg a neki szánt ajándékot, azaz az ajándékozási lánc körbeér?

Nyelvi problémák

Á 26.2. Hány olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amelyik nem osztható 2-vel és 3-mal?

Á 26.3. Egy dobozban 12 darab sárga, 20 zöld és 26 piros golyó van. Hány darabot kell közülük látatlanban kivenni ahhoz, hogy az alábbi állítás biztosan igaz legyen?

„A kivett darabok között van négy sárga vagy zöld.”

Á 26.4. [egyszintű próbaérettségi vizsga, 2014] Az 1, 3, 5 és 8 számjegyekből hány olyan 2-vel osztható pozitív háromjegyű számot képezhetünk, melynek számjegyei különbözőek?

Á 26.5. Egy pozitív egész szám és két szomszédjának négyzetösszege felírható öt egymást követő egész szám összegeként. Hány ilyen tulajdonságú szám van a háromjegyű számok között? [K 354.]

Á 26.6. 2016. januári újsághír: *A január 16-án írt gimnáziumi felvételi tesztek egyik feladatának hibás volt a megoldókulcsa. A nyolcosztályos gimnáziumba készülő negyedikeseknek szóló egyik feladat 8. példájában egy bőrönd számszárjának három számjegyjű nyitókódját kell kitalálni, ehhez a feladatban szereplő kislány az alábbi instrukciót adja:*

„Az enyém a legnagyobb olyan 900-nál kisebb szám, amelynek mindhárom számjegye különböző, és páratlan.”

Mi okozhatott félreértést?

K 25.5. [OKTV, 2015.] „Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák és mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?” Mi lehetett a félreértés oka?

Koordináta-geometria

K 6.3. Adott a k kör egyenlete: $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$. Számítsuk ki a P pontból húzott érintő egyenletét, ha **a**) $P(-3; -2)$, **b**) $P(-1; -0,5)$!

K 6.5. Adottak a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(2; 2)$ és $B(5; 6)$ pontok. Az x tengely mely P pontjára lesz az APB háromszög területe 15 egység?

K 6.6. Adottak az $A(-3; 3)$, $B(3; -1)$, $C(6; 4)$ pontok. Milyen pontthalmazt határoz meg az ABC háromszög súlypontja, ha a C csúcs az $e: 2x + y = 16$ egyenletű egyenesen mozog?

K 6.7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $e: y = \frac{3}{4}x$

egyenes és a $k: x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör. Az ABC háromszög csúcsai $A(2; -1)$, $B(11; 2)$, a C csúcs pedig rajta van az e egyenesen és a k körön is. Határozzuk meg C koordinátáit!

Valószínűesszámitási paradoxonok

Á 23.4. Pisti sakktáborba szeretne menni a nyáron, de csak akkor engedik el, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánt megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrendet érdemes választania Pistinek?

Á 23.5. Andrásnak két golyója van, Bélának egy. A golyók elgurítása után megnézik, melyiküké közelített meg jobban egy előre kitűzött pálcát (a pálcát és a golyók távolságai mind különbözők). Ha mind a két játékos ugyanolyan ügyes, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy András győz?

K 20.3. Pisti és Csilla egyszerű kockajátékokat játszanak.

a) Két dobókocka számozása A : 2,2,2,2,6,6; illetve B : 5,5,5,5,1,1. A játékosok kiválasztanak egy-egy kockát, majd mindketten dobnak a sajátjukkal. Az a játékos nyer, aki nagyobbat dob. Hogyan érdemes választaniuk?

b) Most kezdetben három dobókocka van: A : 2,2,2,2,5,5; B : 4,4,4,4,1,1; C : 3,3,3,3,3,3. Csilla megengedi, hogy most is először Pisti válasszon egyet, majd utána ő is kiválasztja a maradékból a saját kockáját. Hogyan játsszon Pisti?

K 20.2. Karinthynak volt egy aforizmája: „Az autóbusz mindig ellenkező irányból jön, mint ahonnan várjuk.” Lehet-e valóban, hogy valamelyik megállóhoz a kedvezőtlen irányból nagyobb valószínűséggel érkezik autóbusz, mint a kedvezőből? (Feltételezzük, hogy a kocsikat mindkét irányból egyenlő időközökben indítják, és a kocsik állandó, mindkét irányban egyenlő sebességgel haladnak.) [KöMaL F.676.]

Kis paradoxonok

K 26.3. Minden x -re teljesülnek a következő azonos átalakítások:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow (\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \cos^3 x + 3 = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3 \Leftrightarrow$$

$$(\cos^3 x + 3)^2 = \left((1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3 \right)^2.$$

(Mj: pl. $x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítés esetén a bal és a jobb oldal is 9.)

Most helyettesítsünk be pl. $x = \pi$ -t. A bal oldal 2^2 , a jobb oldal 4^2 . Ebből következik az alapok egyenlősége: $2 = 4 \Leftrightarrow 1 = 2$. ???

Á 27.7. Állítás: A prímszámok száma végtelen.

Bizonyítás: Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy véges sok prímszám létezik, ezeket jelölje $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Tekintsük az összes prímszám szorzatából képezett $S = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ számot! Mivel S nem osztható a $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ prímek egyikével sem (1 maradékot ad bármelyikkel osztva), ezért S csak újabb, korábban nem felsorolt prímszám lehet. Ellentmondást kaptunk (korábban az összes prímszámot összeszoroztuk), ezért a kiindulási feltevés hamis. Ebből következik, hogy végtelen sok prímszám van.

K 12.5. Egy körlemez kerületén sorban felveszünk 1, 2, 3, 4 pontot, s ezeket egyenes szakaszokkal összekötjük egymással. A szakaszok a körlemez rendre 1, 2, 4, 8 részre osztják. Ez alapján van-e sejtésünk, hogy 6 pont esetén legfeljebb hány részre osztják a szakaszok a körlemez?

Nehezebb feladatok 3.

Á 15.7. Az $ABCDEFGH$ téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza 4 cm, 4 cm, 10 cm. Az egyik négyzetlapon egy légy, a másikon egy pók ül. A légy oldalélektől mért távolságai 2, 1, 2, 3 cm (vagyis egy középvonal 1:3 arányú osztópontjában van), a pók a légyhez képest a test középpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Milyen irányban induljon a pók a légy felé, hogy a lehető legrövidebb úton elérje? (A pók csak a téglatest felületén mozoghat.)

K 10.6. Mekkora a valódi mérete annak a ferdén felállított pálcának, amelynek felülnézeti, előlnézeti és oldalnézeti vetületeinek hossza rendre **a)** 5 cm, 12 cm, 18 cm; **b)** 5 cm, 12 cm és 14 cm; **c)** 6 cm, 13 cm és 14 cm?

K 12.6. Egy négyzet alakú kert középpontján ül egy nyuszi, a sarkokon pedig egy-egy farkas. A farkasok 1,4-szer gyorsabban futnak a nyuszinál, de csak a kert határa mentén mozoghatnak. Kijuthat-e a nyuszi a kertből? [KöMaL F.97, Gy.2313.]

K 20.6. Véletlenszerűen három részre törünk egy pálcát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három darabból kirakható egy háromszög?

Á 23.7. Valamely urnában n golyó van, melyek közül néhányat kihúzunk. Mi valószínűbb: a kihúzott golyók száma páros vagy páratlan? [KöMaL F.1096]